

ИЮЛЬ/АВГУСТ

ISSN 0130-2221

1999 · №4

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



ИЮЛЬ/АВГУСТ

ISSN 0130-2221

1999 · №4

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





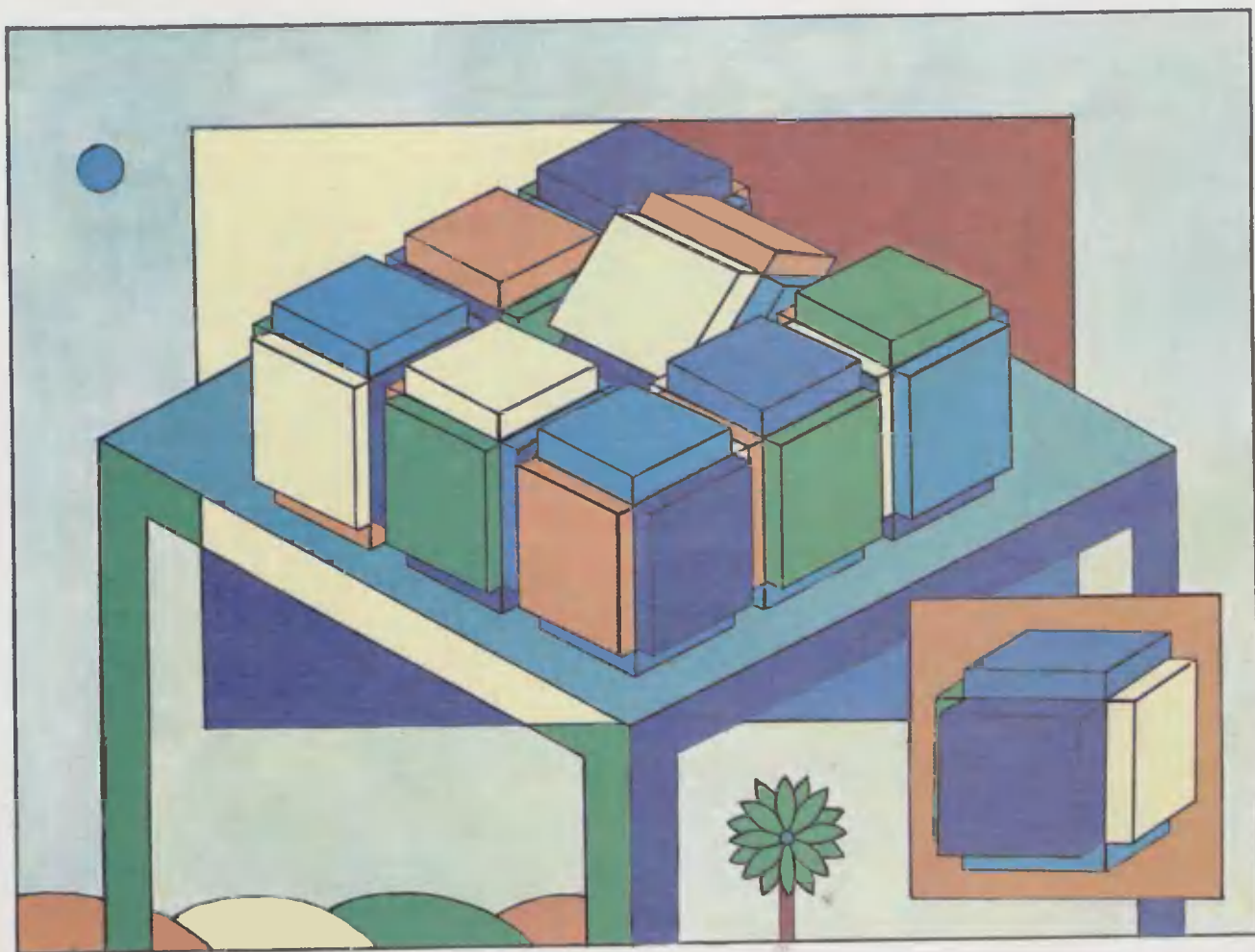
# КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Вроде незамысловатое это занятие — катать кубик по плоскости. Но если вы соедините его с известной игрой «15», получится качественно новая интересная игра-головоломка. Для этого квадратные фишки в игре «15» надо заменить на равные кубики, по-прежнему оставив одно место свободным; «ход» состоит в том, что один из кубиков перекачивается через ребро на свободное место. Конечно, кубики надо тем или иным способом разметить. Теперь можно решать задачу, типичную для всех головоломок этого сорта (той же игры «15», кубика Рубика, «вавилонской башни»,... — в последние годы их появилось великое множество): отыскивать цепочку ходов, которая переводит одно данное расположение кубиков в другое.

Меняя разметку кубиков, размеры и форму поля, можно получить разные виды «переверты-

шей» — так назвали свой вариант этой игры А.Дремов и Г.Шевцова. Их «перевертыши» и показаны на рисунке. Каждый кубик здесь раскрашен в 6 цветов наподобие кубика Рубика; на гранях сделаны квадратные выступы, которые вместе с порожками, наклеенными на дно коробки, облегчают перекачивание и к тому же позволяют видеть цвет не только верхней, но и боковых граней каждого кубика.

Будем считать правильным такое расположение кубиков, при котором на всех кубиках грани одного цвета обращены в одну и ту же сторону, а нижний угол пустой; имеется 24 таких расположения (почему?). Сколько ходов вам понадобится, чтобы перейти от одного правильного расположения к другому? (Нам известно решение в 100 ходов.)



# КВАНТ

ИЮЛЬ  
АВГУСТ 1999

# №4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

**Квант**

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин,  
С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин,  
В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,  
А.Р.Зильберман,

С.С.Кротов (*директор «Бюро Квантум»*),

А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,

В.В.Можаев, Н.Х.Розов, Ю.П.Соловьев,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров

(*заместитель главного редактора*),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(*заместитель главного редактора*),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,  
А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

©1999, Президиум РАН,  
Фонд Осипяна, «Квант»

- 2 У нас в гостях «Соросовский образовательный журнал»  
3 Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма. *Ю.Соловьев*  
7 Общая теория относительности. *И.Хриплович*  
B Струна рояля и солнечный свет. *А.Стасенко*

#### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 18 Задачи M1691–M1695, Ф1698–Ф1702  
19 Решения задач M1666–M1675, Ф1683–Ф1687

#### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 25 Задачи  
26 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
26 Очень Важный Вопрос. *А.Котова*

#### ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 29 Несколько задач для 11-классников. *О.Иванов, Т.Иванова*

#### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Биссектрисы, вписанная и невписанные окружности  
треугольника

#### ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 34 Сверхзвук на кончике бича. *Г.Меледин*

#### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 36 «Пентиум» хорошо, а ум лучше. *А.Баабатов*

#### ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 40 Поляризация света. Простейшие опыты. *А.Митрофанов*

#### ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 44 Задачи с проводящими сферами. *А.Черноуцан*

#### ОЛИМПИАДЫ

- 48 LXII Московская математическая олимпиада  
50 Московский отбор на Российскую математическую олимпиаду  
51 Избранные задачи Московской физической олимпиады 1999  
года  
53 Итоги Межобластной заочной математической олимпиады

#### ИНФОРМАЦИЯ

- 43 Заочная школа юных физиков «Фотон»  
54 IV Международная конференция памяти С.Н.Бернштейна  
55 Ответы, указания, решения  
«Квант» улыбается (16)  
Рецензии (38)  
Нам пишут (47)

#### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Ю.Соловьева*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Игрушки по физике*

У нас в гостях

## «СОРОСОВСКИЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЖУРНАЛ»

«Соросовский образовательный журнал» издается (с 1995 года) в рамках Международной Соросовской программы образования в области точных наук. Цель издания заключается в том, чтобы учителя и школьники России могли ознакомиться с последними достижениями современной науки.

Авторы журнала – Соросовские профессора – представляют в журнал в год по две статьи, основанные на материале лекций, прочитанных на Соросовских конференциях. После одобрения экспертными советами или после некоторой доработки статьи публикуются в журнале. Экспертные советы формируются из числа Соросовских профессоров.

Журнал выходит ежемесячно общим тиражом в 40 000 экземпляров и бесплатно рассылается в каждую среднюю школу и каждый вуз страны, а также каждому Соросовскому учителю, доценту и профессору. Это позволяет раздвинуть рамки Соросовской образовательной программы до всей страны и донести научные новости не только до Соросовских учителей, но и вообще до всех учителей, преподавателей университетов и вузов, до всех студентов и школьников.

Судя по опросам, проведенным среди учителей – читателей журнала, он пользуется большим спросом; в продолжении его издания заинтересованы многие тысячи читателей.

Предлагаем вашему вниманию статью московского математика Юрия Петровича Соловьева и статью новосибирского физика Иосифа Бенционовича Хрипловича, опубликованные в «Соросовском образовательном журнале».

ISSN

СОРОСОВСКИЙ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ  
ЖУРНАЛ

ISSN

СОРОСОВСКИЙ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ  
ЖУРНАЛ

ISSN

СОРОСОВСКИЙ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ  
ЖУРНАЛ

ISSN

СОРОСОВСКИЙ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ  
ЖУРНАЛ

ISSN

СОРОСОВСКИЙ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ  
ЖУРНАЛ

ISSN

СОРОСОВСКИЙ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ  
ЖУРНАЛ

# Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма

Ю. СОЛОВЬЕВ

**Н**ЕТ НИ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ проблемы, которая была бы столь популярна, как знаменитая последняя теорема Ферма [1]. Ее автор, Пьер Ферма (1601–1665), еще при жизни был признан одним из величайших математиков Европы. Сегодня имя Ферма неотделимо от теории чисел, однако его теоретико-числовые работы были настолько революционны и так

опережали свое время, что их значение не было понято современниками и слава Ферма основывалась главным образом на его достижениях в других областях математики: ему принадлежат важные труды по аналитической геометрии (наряду с Декартом Ферма был одним из создателей этой науки), по теории максимумов и минимумов функций, впоследствии развившейся в математический анализ, и по геометрической оптике.

Свои научные результаты Ферма не публиковал. Будучи по профессии

юристом, он посвящал математике лишь свободное время и не рассматривал ее как главное дело своей жизни. О сделанных им открытиях известно из его переписки с другими учеными, а также из бумаг, оставшихся после его смерти. В частности, на полях своего экземпляра «Арифметики» Диофанта, великого классического произведения древнегреческой математики, в 1621 году переведенного на латинский язык, Ферма оставил 48 замечаний, содержащих открытые им факты о свойствах чисел.

*Статья перепечатывается из «Соросовского образовательного журнала» (№2, 1998).*





Доказательства Ферма до нас не дошли, однако в тех случаях, когда он утверждал, что доказал ту или иную теорему, впоследствии эту теорему удавалось доказать. Единственным исключением является следующее утверждение: «Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet» («Невозможно разложить куб на два куба, или биквадрат на два биквадрата, или вообще степень, большую двух, на две степени с тем же самым показателем; я нашел этому поистине чудесное доказательство, однако поля слишком узки, чтобы оно здесь вместилось»).

Этот текст, сопровождаемый указанием: «Наблюдение господина Пьера де Ферма», содержится в издании трудов Диофанта, которое было выпущено Ферма-сыном в 1670 году, через 5 лет после смерти отца. Это подлинное замечание, внесенное Ферма в его собственный экземпляр трудов Диофанта, в настоящее время утраченный. Каждому, кто держал в руках «Арифметику» Диофанта издания 1621 года, бросаются в глаза необычайно широкие поля – возможно, именно по этой причине Пьер Ферма записывал на них свои замечания.

Таким образом, в переводе на современный математический язык, Ферма утверждал, что уравнение

$$a^n + b^n = c^n, \quad n > 2,$$

не имеет целочисленных решений с  $abc \neq 0$ . Это утверждение называется *последней (или великой) теоремой Ферма*. В настоящее время все специалисты твердо уверены в том, что Ферма не обладал доказательством этой теоремы и, сверх того, что элементарными методами ее нельзя доказать.

Более трехсот лет теорема Ферма привлекала внимание многих поколений математиков и служила беспрецедентным стимулом для развития математики. Для показателей  $n = 3$  и  $n = 4$  неразрешимость уравнения  $a^n + b^n = c^n$  была доказана Эйлером (опубликовано в 1770 году). Честь доказательства великой теоремы Ферма для  $n = 5$  разделили в 1825 году два выдающихся мате-

матика: немец Дирихле, который только что достиг двадцати лет и как раз начинал свою блестящую научную карьеру, и француз Лежандр – всемирно известный специалист в теории чисел и анализе. В 1832 году, через семь лет после того, как был доказан случай  $n = 5$ , Дирихле опубликовал доказательство случая  $n = 14$ . Разумеется, это слабее случая  $n = 7$ , поскольку любая 14-я степень является 7-й степенью, но не наоборот, и это доказательство было своего рода признанием неудачи со случаем  $n = 7$ . Прошло еще семь лет, прежде чем в 1839 году французский математик Ламе опубликовал доказательство для  $n = 7$ . Все эти доказательства технически очень сложны, однако их методы, по существу, элементарны. В 1847 году немецкий математик Куммер создал теорию «идеального разложения», позволившую одним приемом доказать теорему Ферма для всех простых показателей, меньших 100, кроме  $n = 37, 59$  и  $67$ . Начиная с этого времени основные усилия математиков были направлены на нахождение все более мощных достаточных условий, при которых выполняется теорема Ферма. Были разработаны разнообразные средства, приведшие к созданию обширного раздела математики – теории алгебраических чисел. С помощью сложнейшей теоретико-числовой техники теорема Ферма была проверена для всех  $n \leq 4\,000\,000$ , но до конца 1994 года в общем случае оставалась недоказанной. Получить ее полное доказательство удалось лишь с помощью теории эллиптических кривых. Поэтому мы начнем с краткого экскурса в эту теорию [2].

### Эллиптические кривые

Рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнением третьей степени

$$f(x, y) = \alpha_{30}x^3 + \alpha_{21}x^2y + \dots + \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_0 = 0. \quad (1)$$

Все такие кривые естественным образом разбиваются на два класса. К первому классу относятся те кривые, у которых имеются точки заострения (типа точки  $(0; 0)$  у кривой  $y^2 = x^3$ , рис.1), самопересечения (как точка  $(0; 0)$  у кривой  $y^2 = x^3 + x^2$ , рис.2), а также кривые, для

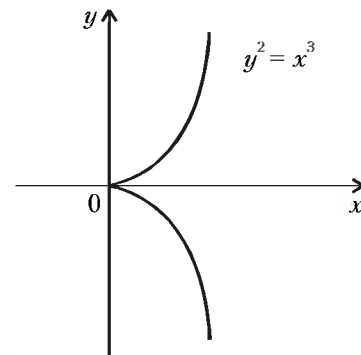


Рис.1

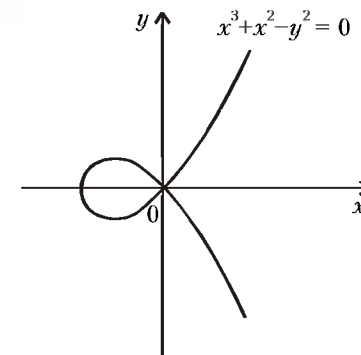


Рис.2

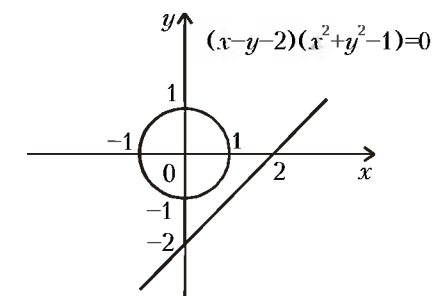


Рис.3

которых многочлен  $f(x, y)$  представляется в виде

$$f(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y),$$

где  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  – многочлены меньших степеней (пример приведен на рисунке 3). Кривые этого класса называются *вырожденными* кривыми третьей степени. Второй класс кривых образуют невырожденные кривые; мы будем называть их *эллиптическими*. Если коэффициенты многочлена (1) – рациональные числа, то эллиптическая кривая может быть преобразована к так называемой канонической форме

$$y^2 = x^3 + ax + b. \quad (2)$$

Типичный вид такой кривой изображен на рисунках 4 и 5.

С каждой эллиптической кривой можно связать важную числовую характеристику – ее *дискриминант*.

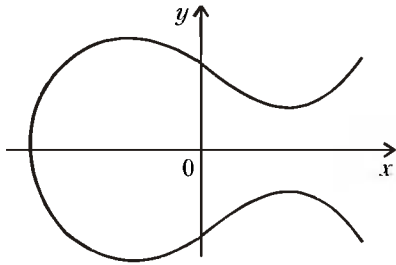


Рис.4

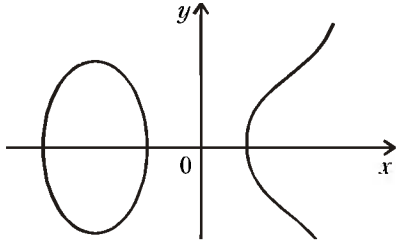


Рис.5

Для кривой, заданной в канонической форме (2), дискриминант  $\Delta$  определяется формулой

$$\Delta = -(4a^3 + 27b^2).$$

Пусть  $E$  – некоторая эллиптическая кривая, заданная уравнением

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

в котором  $a$  и  $b$  – целые числа. Для простого числа  $p$  рассмотрим сравнение

$$y^2 \equiv x^3 + \bar{a}x + \bar{b} \pmod{p}, \quad (3)$$

где  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  – остатки от деления целых чисел  $a$  и  $b$  на  $p$ , и обозначим через  $n_p$  число решений этого сравнения. Числа  $n_p$  очень полезны при исследовании вопроса о разрешимости уравнений вида (2) в целых числах: если какое-то  $n_p$  равно нулю, то уравнение (2) не имеет целочисленных решений. Однако вычислить числа  $n_p$  удается лишь в редчайших случаях. В то же время известно, что  $|p - n_p| \leq 2\sqrt{p}$  (теорема Хассе).

Рассмотрим те простые числа  $p$ , которые делят дискриминант  $\Delta$  эллиптической кривой (2). Можно доказать, что для таких  $p$  многочлен  $x^3 + \bar{a}x + \bar{b}$  можно записать одним из двух способов:

$$x^3 + \bar{a}x + \bar{b} \equiv (x + \bar{\alpha})^2(x + \bar{\beta}) \pmod{p}$$

или

$$x^3 + \bar{a}x + \bar{b} \equiv (x + \bar{\gamma})^3 \pmod{p},$$

где  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  – некоторые остатки от деления на  $p$ . Если для всех простых

$p$ , делящих дискриминант кривой, реализуется первая из двух указанных возможностей, то эллиптическая кривая называется *полустабильной*.

Простые числа, делящие дискриминант, можно объединить в так называемый *кондуктор* эллиптической кривой. Если  $E$  – полустабильная кривая, то ее кондуктор  $N$  задается формулой

$$N = \prod_{p|\Delta} p^{\varepsilon_p}, \quad (4)$$

где для всех простых чисел  $p \geq 5$ , делящих  $\Delta$ , показатель  $\varepsilon_p$  равен 1. Показатели  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  вычисляются с помощью специального алгоритма.

### Модулярные формы и модулярные эллиптические кривые

Обозначим через  $H$  верхнюю комплексную полуплоскость. Пусть  $N$  – натуральное и  $k$  – целое числа. *Модулярной параболической формой* веса  $k$  уровня  $N$  называется аналитическая функция  $f(z)$ , заданная в верхней полуплоскости и удовлетворяющая соотношению

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z) \quad (5)$$

для любых целых чисел  $a, b, c, d$  таких, что  $ad - bc = 1$  и  $c$  делится на  $N$ . Кроме того, предполагается, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(r + it) = 0,$$

где  $r$  – рациональное число, и что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(it) = 0.$$

Пространство модулярных параболических форм веса  $k$  уровня  $N$  обозначается через  $S_k(N)$ . Можно показать, что оно имеет конечную размерность.

В дальнейшем нас будут особо интересовать модулярные параболические формы веса 2. Для малых  $N$  размерность  $\dim S_2(N)$  пространства  $S_2(N)$  представлена в таблице:

$N < 10$	11	12	13	14	15	16
0	1	0	0	1	1	0
	17	18	19	20	21	22
	1	0	1	1	1	2

В частности,

$$\dim S_2(2) = 0. \quad (6)$$

Отметим, что эта нехитрая формула сыграет важную роль в доказательстве теоремы Ферма.

Из условия (5) следует, что  $f(z + 1) = f(z)$  для каждой формы  $f \in S_2(N)$ . Стало быть,  $f$  является периодической функцией. Такую функцию можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi iz}. \quad (7)$$

Назовем модулярную параболическую форму  $f(z) \in S_2(N)$  *собственной*, если ее коэффициенты – целые числа, удовлетворяющие соотношениям

$$a_1 = 1;$$

$$a_{p^r} a_p = a_{p^{r+1}} p c_{p^{r-1}} \quad \text{для простого } p, \text{ не делящего число } N; \quad (8)$$

$$a_{p^r} = (a_p)^r \quad \text{для простого } p, \text{ делящего число } N;$$

$$a_{mn} = a_m a_n, \text{ если } (m, n) = 1.$$

Сформулируем теперь определение, играющее ключевую роль в доказательстве теоремы Ферма. Эллиптическая кривая с рациональными коэффициентами и кондуктором  $N$  называется *модулярной*, если найдется такая собственная форма

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_2(N), \quad (9)$$

что  $a_p = p - n_p$  для почти всех простых чисел  $p$ . Здесь  $n_p$  – число решений сравнения (3).

### Гипотеза Таниямы

Определение модулярной эллиптической кривой является настолько жестким, что на первый взгляд кажется невероятным существование хотя бы одной такой кривой. Трудно представить, что функция  $f(z)$ , удовлетворяющая перечисленным выше весьма ограничительным условиям (5) и (8), разлагается в ряд (7), коэффициенты которого связаны с практически невычислимыми числами  $n_p$ . Однако эмпирический материал, полученный в первой по-



ловине нашего века, позволил японскому математику Ю. Танияме (1927–1958) сформулировать в 1955 году удивительную гипотезу.

**Гипотеза Таниямы.** *Всякая эллиптическая кривая с рациональными коэффициентами является модулярной.*

В течение почти двадцати лет эта гипотеза не привлекала к себе внимания и стала популярной лишь в середине 70-х годов благодаря работам Г. Шимуры и А. Вейля.

В 1985 году немецкий математик Герхард Фрей предположил, что если теорема Ферма неверна, т. е. если найдется такая тройка целых чисел  $a, b, c$ , что  $a^n + b^n = c^n$  ( $n \geq 3$ ), то эллиптическая кривая

$$y^2 = x(x - a^n)(x - c^n) \quad (10)$$

не может быть модулярной, что противоречит гипотезе Таниямы. Самому Фрею не удалось доказать это утверждение, однако вскоре доказательство было получено американским математиком Кеннетом Рибетом. Другими словами, Рибет показал, что *последняя теорема Ферма является следствием гипотезы Таниямы.*

23 июня 1993 года математик из Принстона Эндрю Уайлс, выступая на конференции по теории чисел в Кембридже (Великобритания), анонсировал доказательство гипотезы Таниямы для полустабильных эллиптических кривых, к которым относятся кривые вида (10). Тем самым он заявил, что доказал последнюю теорему Ферма. Дальнейшие события развивались довольно драматически. В начале декабря 1993 года, за несколько дней до того, как рукопись работы Уайлса должна была пойти в печать, в его доказательстве были обнаружены пробелы. Исправление их заняло свыше года. Текст с доказательством гипотезы Таниямы, написанный Уайлсом в сотрудничестве с Тейлором, вышел в свет летом 1995 года (см. [3, 4]).

В рамках этой статьи нет возможности сколько-нибудь подробно обсудить гипотезу Таниямы и привести ее доказательство (занимающее в оригинале около 150 страниц). Поэтому ограничимся тем, что покажем, как из этой гипотезы вытекает последняя теорема Ферма.

## Вывод теоремы Ферма из гипотезы Таниямы

Доказательство теоремы Ферма начнем со следующего замечания. Ясно, что если эта теорема доказана для некоторого показателя  $n$ , то тем самым она доказана и для всех показателей, кратных  $n$ . Так как всякое целое число  $n > 2$  делится или на 4, или на нечетное простое число, то можно поэтому ограничиться случаем, когда показатель равен либо четырем, либо нечетному простому числу. Для  $n = 4$  элементарное доказательство теоремы Ферма было получено Эйлером. Таким образом, достаточно изучить уравнение

$$a^l + b^l = c^l, \quad (11)$$

в котором показатель  $l$  есть нечетное простое число.

Воспользуемся теперь следующей теоремой.

**Теорема 1 (Рибет).** *Пусть  $E$  – эллиптическая кривая с рациональными коэффициентами, имеющая дискриминант*

$$\Delta = \prod_{p|\Delta} p^{\delta_p}$$

*и кондуктор*

$$N = \prod_{p|\Delta} p^{\epsilon_p}.$$

*Предположим, что  $E$  является модулярной, и пусть*

$$f(z) = q + \sum_{n=2}^{\infty} a_n q^n \in S_2(N)$$

*есть соответствующая собственная форма уровня  $N$ . Фиксируем простое число  $l$ , и пусть*

$$N_1 = \frac{N}{\prod_{p \in P} p}, \quad (12)$$

*Тогда существует такая параболическая форма*

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n q^n \in S_2(N_1)$$

*с целыми коэффициентами, что разности  $a_n - d_n$  делятся на  $l$  для всех  $1 \leq n < \infty$ .*

Теперь теорему Ферма можно получить простыми вычислениями.

**Теорема 2.** *Из гипотезы Таниямы для полустабильных эллиптических*

*кривых следует последняя теорема Ферма.*

**Доказательство.** Предположим, что теорема Ферма неверна, и пусть

$$a^l + b^l = c^l$$

есть соответствующий контрпример (как и выше, здесь  $l$  – нечетное простое число). Применим теорему 1 к эллиптической кривой

$$y^2 = x(x - a^l)(x - c^l).$$

Несложные вычисления показывают, что кондуктор этой кривой задается формулой

$$N = \prod_{p|abc} p. \quad (13)$$

Сравнивая формулы (12) и (13), мы видим, что  $N_1 = 2$ . Следовательно, по теореме 1 найдется параболическая форма

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n q^n,$$

лежащая в пространстве  $S_2(2)$ . Но в силу соотношения (6) это пространство нулевое. Поэтому  $d_n = 0$  для всех  $n$ . В то же время  $a_1 = 1$ . Стало быть, разность  $a_1 - d_1 = 1$  не делится на  $l$ , и мы приходим к противоречию. Таким образом, теорема доказана.

Заметим в заключение, что значение гипотезы Таниямы не ограничивается связью с теоремой Ферма. С доказательством этой гипотезы открываются новые горизонты в алгебраической геометрии и теории чисел.

### Литература

1. Постников М.М. Теорема Ферма. – М.: Наука, 1972.
2. Прасолов В.В., Соловьев Ю.П. Эллиптические кривые и алгебраические уравнения. – М.: Факториал, 1997.
3. Wiles A. Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem // Ann. Math. 1995. Vol. 141. P. 443.
4. Taylor R.L., Wiles A. Ring-Theoretic Properties of Certain Hecke Algebras // Ibid. P. 553.

# Общая теория относительности

И. ХРИПЛОВИЧ

## Немного истории

Общая теория относительности (ОТО) – современная теория тяготения, связывающая его с кривизной четырехмерного пространства–времени.

В своем, так сказать, классическом варианте теория тяготения была создана Ньютоном еще в XVII веке и до сих пор верно служит человечеству.

*Статья перепечатывается из «Соросовского образовательного журнала» (№4, 1996).*

Она вполне достаточна для многих, если не для большинства, задач современной астрономии, астрофизики, космонавтики. Между тем ее принципиальный внутренний недостаток был ясен еще самому Ньютону. Это теория с дальностью действия: в ней гравитационное действие одного тела на другое передается мгновенно, без запаздывания. Ньютоновская гравитация так же соотносится с общей теорией относительности, как закон Кулона – с максвелловской электродинамикой. Максвеллу удалось

изгнать дальность действия из электродинамики. В гравитации это сделал Эйнштейн.

Начать рассказ следует с замечательной работы Эйнштейна 1905 года, в которой была сформулирована специальная теория относительности и которая завершила в идейном отношении развитие классической электродинамики. У этой работы несомненно были предшественники, среди которых нельзя не упомянуть работы Лоренца и Пуанкаре. В их статьях уже содержались многие элементы



Иллюстрация В. Власова

специальной теории относительности. Однако ясное понимание, цельная картина физики больших скоростей появились лишь в упомянутой работе Эйнштейна. Не случайно, несмотря на наличие прекрасных современных учебников, ее до сих пор можно рекомендовать для первого знакомства с предметом не только студентам, но и старшеклассникам.

Что же касается ОТО, то все ее основополагающие элементы были созданы Эйнштейном.

Впрочем, предчувствие того, что физика может быть связана с кривизной пространства, можно найти в трудах замечательных ученых прошлого века Гаусса, Римана, Гельмгольца, Клиффорда. Гаусс, который пришел к идеям неевклидовой геометрии несколько ранее Лобачевского и Бойаи, но так и не опубликовал своих исследований в этой области, не только считал, что «геометрию приходится ставить в один ряд не с арифметикой, существующей чисто a priori, а скорее с механикой». Он пытался проверить экспериментально, путем точных (для того времени) измерений геометрию нашего пространства. Его идея вдохновила Римана, полагавшего, что наше пространство действительно искривлено (а на малых расстояниях даже дискретно). Жесткие ограничения на кривизну пространства были получены из астрономических данных Гельмгольцем. Клиффорд считал материю рябью на искривленном пространстве.

Однако все эти блестящие догадки и прозрения были явно преждевременны. Создание современной теории тяготения было немыслимым без специальной теории относительности, без глубокого понимания структуры классической электродинамики, без осознания единства пространства–времени. Как уже отмечалось, ОТО была создана в основном усилиями одного человека. Путь Эйнштейна к построению этой теории был долгим и мучительным. Если его работа 1905 года «К электродинамике движущихся сред» появилась как бы сразу в законченном виде, оставляя вне поля зрения читателя длительные размышления, тяжелый труд автора, то с ОТО дело обстояло совершенно иначе. Эйнштейн начал работать над ней с 1907 года. Его путь к ОТО продолжался несколько лет. Это был путь проб и ошибок, кото-

рый хотя бы отчасти можно проследить по публикациям Эйнштейна в эти годы. Окончательно задача была решена им в двух работах, доложенных на заседаниях Прусской Академии наук в Берлине 18 и 25 ноября 1915 года. В них были сформулированы уравнения гравитационного поля в пустоте и при наличии источников.

В последнем этапе создания ОТО принял участие Гильберт. Вообще значение математики (и математиков) для ОТО очень велико. Ее аппарат, тензорный анализ, или абсолютное дифференциальное исчисление, был развит Риччи и Леви-Чивита. Друг Эйнштейна, математик Гроссман познакомил его с этой техникой.

И все же ОТО – это физическая теория, в основе которой лежит ясный физический принцип, твердо установленный экспериментальный факт.

### Принцип эквивалентности и геометризация тяготения

Факт этот по существу был установлен еще Галилеем. Он хорошо известен каждому успевающему старшекласснику: все тела движутся в поле тяжести (в отсутствие сопротивления среды) с одним и тем же ускорением, траектории всех тел с заданной скоростью искривлены в гравитационном поле одинаково. Благодаря этому, в свободно падающем лифте никакой эксперимент не может обнаружить гравитационное поле. Иными словами, в системе отсчета, свободно движущейся в гравитационном поле, в малой области пространства–времени гравитации нет. Последнее утверждение – это одна из формулировок принципа эквивалентности.

Данное свойство поля тяготения отнюдь не тривиально. Достаточно вспомнить, что в случае электромагнитного поля ситуация совершенно иная. Существуют, например, незаряженные, нейтральные тела, которые электромагнитного поля вообще не чувствуют. Так вот, гравитационно-нейтральных тел нет, не существует ни линеек, ни часов, которые не чувствовали бы гравитационного поля. Эталоны привычного евклидова пространства меняются в поле тяготения. Геометрия нашего пространства оказывается неевклидовой.

Некоторое представление о свойствах такого пространства можно

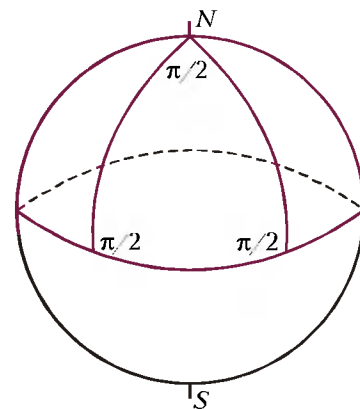


Рис.1. Сферический треугольник

получить на простейшем примере сферы, поверхности обычного глобуса. Рассмотрим на ней сферический треугольник – фигуру, ограниченную дугами большого радиуса. (Дуга большого радиуса, соединяющая две точки на сфере, – это кратчайшее расстояние между ними; она естественный аналог прямой на плоскости.) Выберем в качестве этих дуг участки меридианов, отличающихся на 90° долготы, и экватора (рис. 1). Сумма углов этого сферического треугольника отнюдь не равна  $\pi$ , сумме углов треугольника на плоскости:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2}\pi. \quad (1)$$

Заметим, что превышение суммы углов данного треугольника над  $\pi$  может быть выражено через его площадь  $S$  и радиус сферы  $R$ :

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{S}{R^2}. \quad (2)$$

Можно доказать, что это соотношение справедливо для любого сферического треугольника. Заметим также, что обычный случай треугольника на плоскости тоже вытекает из этого равенства: плоскость может рассматриваться как сфера с  $R \rightarrow \infty$ .

Перепишем формулу (2) иначе:

$$K = \frac{1}{R^2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{S}. \quad (3)$$

Отсюда видно, что радиус сферы можно определить, оставаясь на ней, не обращаясь к трехмерному пространству, в которое она погружена. Для этого достаточно измерить площадь сферического треугольника и сумму его углов. Иными словами,  $K$  (или  $R$ ) является внутренней характеристикой сферы. Величину  $K$  принято называть гауссовой кривизной, она естественным образом обобщает-



ся на произвольную гладкую поверхность:

$$K(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{S}. \quad (4)$$

Здесь углы и площадь относятся к малому треугольнику на поверхности, ограниченному линиями кратчайших расстояний на ней, а кривизна, вообще говоря, меняется от точки к точке, является величиной локальной. И в общем случае, так же как и для сферы,  $K$  служит внутренней характеристикой поверхности, не зависящей от ее погружения в трехмерное пространство. Гауссова кривизна не меняется при изгибании поверхности без ее разрыва и растяжения. Так, например, конус или цилиндр можно разогнуть в плоскость, и поэтому для них, так же как для плоскости,  $K = 0$ .

На соотношения (3), (4) полезно взглянуть несколько иначе. Возьмем на полюсе вектор, направленный вдоль одного из меридианов, и перенесем его вдоль этого меридиана, не меняя угла между ними (в данном случае нулевого), на экватор. Далее, перенесем его вдоль экватора, снова не меняя угла между ними (на сей раз  $\pi/2$ ), на второй меридиан. И наконец, таким же образом вернемся вдоль второго меридиана на полюс. Легко видеть, что, в отличие от такого же переноса по замкнутому контуру на плоскости, вектор окажется в конечном счете повернутым относительно своего исходного направления на  $\pi/2$ , или на

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = KS. \quad (5)$$

Этот результат, поворот вектора при его переносе вдоль замкнутого контура на угол, пропорциональный охваченной площади, естественным образом обобщается не только на произвольную двумерную поверхность, но и на многомерные неевклидовы пространства. Однако в общем случае  $n$ -мерного пространства кривизна не сводится к одной скалярной величине  $K(x)$ . Это более сложный геометрический объект, имеющий  $n^2(n^2 - 1)/12$  компонент. Его называют тензором кривизны, или тензором Римана, а сами эти пространства – римановыми. В четырехмерном римановом пространстве–времени общей теории относительности тензор кривизны имеет 20 компонент.

### Классические опыты по проверке ОТО

В начале предыдущего раздела уже отмечалось, что гравитационное поле влияет на движение не только массивных тел, но и света. В частности, фотон, распространяясь в поле Земли вверх, совершает работу против силы тяжести и поэтому теряет энергию. Как известно, энергия фотона пропорциональна его частоте, которая, естественно, тоже падает. Этот эффект – красное смещение – был предсказан Эйнштейном еще в 1907 году. Нетрудно оценить его величину. Работа против силы тяжести, очевидно, пропорциональна  $gh$ , где  $g$  – ускорение свободного падения, а  $h$  – высота подъема. Произведение  $gh$  имеет размерность квадрата скорости. Поэтому результат для относительного смещения частоты выглядит из соображений размерности так:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{gh}{c^2}, \quad (6)$$

где  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с – скорость света. При  $g \approx 10^3$  см/с<sup>2</sup>,  $h \sim 10^3$  см относительное смещение ничтожно мало  $\sim 10^{-15}$ . Неудивительно, что экспериментально красное смещение удалось наблюдать лишь спустя полвека, с появлением техники, использующей эффект Мёссбауэра. Это сделали Паунд и Ребка.

Еще один эффект, предсказанный Эйнштейном на заре ОТО, – отклонение луча света в поле Солнца. Его величину нетрудно оценить следующим образом. Если характерное, прицельное, расстояние луча от Солнца равно  $\rho$ , то радиальное ускорение составляет  $GM/\rho^2$ , где  $G$  – ньютоновская гравитационная постоянная, а  $M$  – масса Солнца. За характерное время пролета  $\rho/c$  радиальная компонента скорости фотона изменится на  $GM/(\rho c)$  и угол отклонения составит соответственно

$$\theta \sim \frac{GM}{c^2 \rho}.$$

Удобно ввести часто используемую в ОТО характеристику массивного тела, так называемый гравитационный радиус:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (7)$$

Наивное использование полуклассических соображений действительно

приводит к ответу

$$\theta = \frac{r_g}{\rho}.$$

Именно этот результат был получен Эйнштейном в одном из первоначальных вариантов ОТО. Первая мировая война воспрепятствовала проверке, неблагоприятной для теории. Окончательный, правильный результат ОТО вдвое больше:

$$\theta = 2 \frac{r_g}{\rho}. \quad (8)$$

Гравитационный радиус Солнца  $r_g \approx 3$  км, а прицельный параметр естественно сделать как можно ближе к обычному радиусу Солнца, который составляет  $7 \cdot 10^5$  км. Таким образом, для луча света, проходящего вблизи поверхности Солнца, угол отклонения равен  $1,75''$ . Измерения, проведенные группой Эддингтона во время солнечного затмения 1919 года, подтвердили последнее предсказание. Это был подлинный триумф молодой общей теории относительности.

И наконец, к числу классических тестов ОТО относится также вращение перигелия орбиты Меркурия. Замкнутые эллиптические орбиты – это специфика нерелятивистского движения в притягивающем потенциале  $1/r$ . Неудивительно, что в ОТО орбиты планет незамкнуты. Малый эффект такого рода удобно описывать как вращение перигелия эллиптической орбиты. Задолго до появления ОТО астрономы знали, что перигелий орбиты Меркурия поворачивается за столетие примерно на  $6000''$ . Поворот этот в основном объяснялся гравитационными возмущениями движения Меркурия со стороны других планет Солнечной системы. Оставался, однако, неустраняемый остаток – около  $40''$  в столетие. В 1915 году Эйнштейн объяснил это расхождение в рамках ОТО.

Из простых соображений размерности можно ожидать, что поворот перигелия за один оборот составляет

$$\delta \sim \frac{r_g}{R},$$

где  $R$  – радиус орбиты. Аккуратный расчет в рамках ОТО для орбиты, близкой к круговой, дает

$$\delta = \frac{3\pi r_g}{R}. \quad (9)$$

При радиусе орбиты Меркурия

$R \approx 0,6 \cdot 10^8$  км это дает  $43''$  в столетие, снимая таким образом существовавшее расхождение. Ясно, кстати, чем выделяется в этом отношении Меркурий: это планета, ближайшая к Солнцу, планета с наименьшим радиусом орбиты  $R$ . Поэтому вращение перигелия орбиты у нее минимально.

## Черные дыры

Однако роль ОТО отнюдь не сводится к исследованию малых поправок к обычной ньютоновской гравитации. Существуют объекты, в которых эффекты ОТО играют ключевую роль, важны стопроцентно. Это так называемые черные дыры.

Еще в XVIII веке Митчел и Лаплас независимо заметили, что могут существовать звезды, обладающие совершенно необычным свойством: свет не может покинуть их поверхность. Рассуждение выглядело примерно так. Тело, обладающее радиальной скоростью  $v$ , может покинуть поверхность звезды радиусом  $R$  и массой  $M$  при условии, что кинетическая энергия этого тела  $mv^2/2$  превышает энергию притяжения  $GMm/R$ , т.е. при  $v^2 > 2GM/R$ . Применение последнего неравенства к свету (как мы теперь понимаем, совершенно не обоснованное) приводит к выводу: если радиус звезды меньше чем

$$r_g = \frac{2GM}{c^2},$$

то свет не может покинуть ее поверхность, такая звезда не светит! Последовательное применение ОТО приводит к такому же выводу, причем, поразительно, правильный критерий количественно совпадает с наивным, необоснованным. Величина  $r_g$ , гравитационный радиус, уже встречалась раньше (см. формулу (7)).

Черная дыра – вполне естественное название для такого объекта. Свойства его весьма необычны. Черная дыра возникает, когда звезда сжимается настолько сильно, что усиливающееся гравитационное поле не выпускает во внешнее пространство ничего, даже свет. Поэтому из черной дыры не выходит никакая информация.

Занятно выглядит падение пробного тела на черную дыру. По часам бесконечно удаленного наблюдателя это тело достигает гравитационного радиуса лишь за бесконечное время. С другой стороны, по часам, установ-

ленным на самом пробном теле, время этого путешествия вполне конечно.

Многочисленные результаты астрономических наблюдений дают серьезные основания полагать, что черные дыры – это не просто игра ума физиков-теоретиков, а реальные объекты, существующие по крайней мере в ядрах галактик.

## Пульсар PSR 1913+16 и гравитационные волны

Нобелевская премия по физике за 1993 год была присуждена Халсу и Тейлору за исследование пульсара PSR 1913+16 (буквы PSR означают пульсар, а цифры относятся к координатам на небесной сфере: прямое восхождение  $19^h 13^m$ , склонение  $+16^\circ$ ). Исследование свойств излучения этого пульсара показало, что он является компонентом двойной звезды. Иными словами, у него есть компаньон, и обе звезды вращаются вокруг общего центра масс. Расстояние между этим пульсаром и его компаньоном составляет всего  $1,8 \cdot 10^6$  км. Если бы невидимый компаньон был обычной звездой с характерным радиусом  $\sim 10^6$  км, то наблюдались бы, очевидно, затменные пульсары. Однако ничего подобного не происходит. Подробный анализ наблюдений показал, что невидимый компонент – это не что иное, как нейтронная звезда.

Существование нейтронных звезд было предсказано теоретически еще в 30-е годы. Они образуются в результате бурного гравитационного сжатия массивных звезд, сопровождающегося взрывом сверхновых. После взрыва давление в оставшемся ядре массивной звезды продолжает нарастать, электроны с протонами сливаются (с испусканием нейтрино) в нейтроны. Образуется очень плотная звезда с массой, несколько большей массы Солнца, но очень малого размера, порядка  $10 - 15$  км, не превышающего размер астероида. Несомненно, наблюдение нейтронных звезд уже само по себе является выдающимся открытием.

Кроме того, тщательное исследование движения этой двойной звезды дало новое подтверждение предсказания ОТО, касающегося незамкнутости эллиптических орбит. Поскольку гравитационные поля в данной системе очень велики, периастр орбиты вращается несравненно быстрее,

чем перигелий орбиты Меркурия, он поворачивается на  $4,2^\circ$  в год. Изучение этого и других эффектов позволило также определить с высокой точностью массы пульсара и нейтронной звезды. Они равны, соответственно,  $1,442$  и  $1,386$  массы Солнца. Но и это далеко не все.

Еще в 1918 году Эйнштейн предсказал на основе ОТО существование гравитационного излучения. Хорошо известно, что электрически заряженные частицы, будучи ускоренными, излучают электромагнитные волны. Аналогично, массивные тела, двигаясь с ускорением, излучают гравитационные волны – рябь геометрии пространства, распространяющуюся тоже со скоростью света.

Следует заметить, что аналогия эта неполна (впрочем, как практически и всякая иная). Одно из отличий между электромагнитными и гравитационными волнами, имеющее довольно существенный характер, состоит в следующем. В отличие от случая электромагнитного поля плотность энергии гравитационного поля, гравитационной волны локально, в данной точке, можно всегда обратить в ноль подходящим выбором системы координат. В свое время, лет  $60 - 70$  назад, это обстоятельство рассматривалось как серьезная трудность теории. Затем, однако, смысл его был прояснен, и проблема была снята. Тем не менее, по-видимому, стоит остановиться на этом вопросе в данной, по существу научно-популярной, статье по следующей причине. В последние годы в нашей стране в некоторых публикациях, претендующих на серьезный научный характер, а также в научно-популярной литературе появились утверждения о том, что возможность обращения в ноль локальной плотности энергии гравитационного поля является коренным, принципиальным дефектом ОТО.

На самом же деле ничего страшного в этом факте нет. Он – прямое следствие принципа эквивалентности. Действительно, как уже упоминалось выше, переходя в систему, связанную со свободно падающим лифтом, мы обращаем в ноль напряженность гравитационного поля. Вполне естественно, что в этой системе равна нулю и плотность энергии гравитационного поля.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Это соображение принадлежит С.И. Литерату, учителю средней школы № 130 г. Новосибирска.

Отсюда, однако, вовсе не следует, что гравитационные волны – всего лишь игра ума, математическая абстракция. Это в принципе наблюдаемое физическое явление. Так, например, стержень, находящийся в поле гравитационной волны, испытывает деформации, меняющиеся с ее частотой. Увы, оговорка «в принципе» отнюдь не случайна: масса любого объекта на Земле настолько мала, а движение его столь медленно, что генерация гравитационного излучения в земных условиях совершенно ничтожна, не видно сколько-нибудь реального способа зарегистрировать такое излучение. Существует ряд проектов создания детекторов гравитационного излучения от космических объектов. Однако и здесь реальных результатов до сих пор нет.

Следует также сказать, что, хотя плотность энергии гравитационного поля в любой точке можно по своему желанию обратить в ноль выбором подходящей системы координат, полная энергия этого поля во всем объеме, полный его импульс имеют совершенно реальный физический смысл (конечно, если поле достаточно быстро убывает на бесконечности). Столь же наблюдаемой, хорошо определенной величиной является и потеря энергии системой за счет гравитационного излучения.

Все это имеет самое прямое отношение к пульсару PSR 1913+16. Эта система также должна излучать гравитационные волны. Их энергия в данном случае огромна, она сравнима с полной энергией излучения Солнца. Впрочем, даже этого недостаточно, чтобы непосредственно зарегистрировать эти волны на Земле. Однако энергия гравитационных волн может черпаться только из энергии орбитального движения звезд. Падение последней приводит к уменьшению расстояния между звездами. Так вот, тщательные измерения импульсов радиоизлучения от пульсара PSR 1913+16 показали, что расстояние между компонентами этой двойной звезды уменьшается на несколько метров в год в полном согласии с предсказанием ОТО. Любопытно, что потеря энергии двойной звездой за счет гравитационного излучения была впервые рассчитана Ландау и Лифшицем, они поместили этот расчет в качестве учебной задачи в первое издание своей замечательной книги «Теория поля», которое вышло в 1941 году.

### Гравитационные линзы и коричневые карлики

И наконец, сюжет, еще более свежий, чем пульсар PSR 1913+16. Он тесно связан, однако, с идеей, возникшей еще на заре ОТО. В 1919 году Эддингтон и Лодж независимо заметили, что, поскольку звезда отклоняет световые лучи, она может рассматриваться как своеобразная гравитационная линза. Такая линза смещает видимое изображение звезды-источника по отношению к ее истинному положению.

Первая наивная оценка может привести к выводу о полной безнадёжности наблюдения эффекта. Из простых соображений размерности можно было бы заключить, что изображение окажется сдвинутым на угол порядка  $r_g/d$ , где  $r_g$  – гравитационный радиус линзы, а  $d$  – характерное расстояние в задаче. Даже если взять в качестве линзы скопление, состоящее из  $10^4$  звезд, а для расстояния принять оценку  $d \sim 10$  световых лет, то и тогда этот угол составил бы всего  $10^{-10}$  радиан. Разрешение подобных углов практически невозможно.

Однако такая наивная оценка просто неверна. Это следует, в частности, из исследования простейшего случая соосного расположения источника  $S$ , линзы  $L$  и наблюдателя  $O$  (рис. 2). Задача эта была рассмотрена в 1924 году Хвольсоном<sup>2</sup> и спустя 12 лет Эйнштейном. Обратимся к ней и мы. Ясно, что для всякого расстояния  $d_1$  между источ-

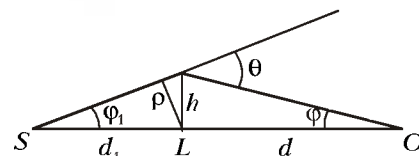


Рис. 2. Гравитационная линза. Осесимметричный случай.  $S$  – источник,  $L$  – линза,  $O$  – наблюдатель

ником и линзой,  $d$  – между линзой и наблюдателем и для любого гравитационного радиуса  $r_g$  линзы (звезды или скопления звезд) найдется такое минимальное расстояние  $\rho$  между лучом из источника и линзой, при котором этот луч попадет в приемник. При этом изображения источника заполняют окружность,

которую наблюдатель видит под углом  $\theta$ . Углы  $\theta$  и  $\phi_1$  малы, так что  $\theta = h/d$ ,  $\phi_1 = h/d_1$ , а, кроме того,  $h = \rho$ . Отсюда легко находим

$$\theta = \phi + \phi_1 = \frac{h(d_1 + d)}{d_1 d}.$$

С другой стороны, для  $\theta$  справедлива, очевидно, формула (8). Таким образом,

$$h = \sqrt{2r_g \frac{d_1 d}{d_1 + d}}.$$

И наконец, интересующий нас угол составляет

$$\phi = \sqrt{2r_g \frac{d_1}{(d_1 + d)d}}. \quad (10)$$

Таким образом, правильный порядок величины угловых размеров изображения не  $r_g/d$ , а  $\sqrt{r_g/d}$  (мы считаем здесь, что все расстояния по порядку величины одинаковы). Он оказался намного больше первой, наивной, оценки, и это радикально меняет ситуацию с возможностью наблюдения эффектов гравитационных линз.

Изображение источника в виде окружности (ее принято называть кольцом Эйнштейна), создаваемое гравитационной линзой при аксиально-симметричном расположении, реально наблюдалось. Сейчас известно несколько источников в радиодиапазоне, которые выглядят именно так, кольцеобразно.

Если, однако, гравитационная линза не лежит на прямой, соединяющей источник с наблюдателем, картина оказывается иной. В случае сферически-симметричной линзы возникают два изображения (рис. 3), одно из которых лежит внутри кольца Эйнштейна, соответствующего осесимметричной картине, а другое – снаружи. Подобные изображения также наблюдались, они выглядят

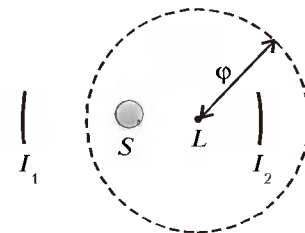


Рис. 3. Гравитационная линза. Общий случай.  $S$  – проекция источника на фронтальную плоскость,  $L$  – проекция линзы,  $I_1, I_2$  – изображения источника

<sup>2</sup>Профессор Петербургского университета, автор пятитомного курса физики, широко известного в начале века.



как двойные квазары, как квазары-близнецы.

Если источник движется, то перемещаются и оба изображения. Пока яркости обоих сравнимы с яркостью источника, для оценки углового расстояния между ними можно по-прежнему использовать выражение (10). Если масса звезды, действующей в качестве линзы, невелика, скажем на два – три порядка величины меньше массы Солнца, то разрешить такой угол между изображениями,  $\sim 0,001''$ , практически невозможно. Тем не менее обнаружить подобное явление можно. Дело в том, что при сближении изображений их суммарная яркость растет. Явление это, так называемое микролинзирование, имеет достаточно специфический характер: рост яркости и ее последующее падение происходят симметрично во времени, причем изменение яркости происходит одинаково на всех длинах волн (угол отклонения (10) не зависит от длины волны).

Поиски микролинзирования, которые велись на протяжении нескольких лет двумя группами астрономов, австралийско-американской и французской, не просто привели к обнаружению эффекта. Таким образом был открыт новый класс небесных тел: слабосветящиеся карликовые звезды, так называемые коричневые карлики, именно они играют роль микролинз. Все это произошло совсем недавно. Если еще в январе 1994 года было известно лишь два – три подобных события, то в настоящее время они уже исчисляются десятками. Поистине первоклассное открытие в астрономии.

## Заключение

ОТО – завершенная физическая теория. Она завершена в том же смысле, что и классическая механика, классическая электродинамика, квантовая механика. Подобно им, она дает однозначные ответы на физически осмысленные вопросы, дает четкие предсказания для реально осуществимых наблюдений и экспериментов. Однако, как и всякая иная физическая теория, ОТО имеет свою область применимости. Так, вне этой области лежат сверхсильные гравитационные поля, где важны квантовые эффекты. Законченной квантовой теории гравитации не существует.

ОТО – удивительная физическая теория. Она удивительна тем, что в ее основе лежит, по существу, всего один экспериментальный факт, к тому же известный задолго до создания ОТО (все тела падают в поле тяжести с одним и тем же ускорением). Удивительна тем, что она создана в большой степени одним человеком. Но прежде всего ОТО удивительна своей необычайной внутренней стройностью, красотой. Не случайно Ландау говорил, что истинного физика-теоретика можно распознать по тому, испытал ли человек восхищение при первом же знакомстве с ОТО.

Примерно до середины 60-х годов ОТО находилась в значительной мере вне основной линии развития физики. Да и развитие самой ОТО отнюдь не было весьма активным, оно сводилось в большой степени к выяснению определенных тонких мест, деталей теории, к решению пусть важных, но достаточно частных задач. И не случайно еще на моей памяти уважаемый физик старшего поколения не советовал молодым теоретикам заниматься ОТО. «Это наука для пожилых людей», – говорил он.

Вероятно, одна из причин такой ситуации состоит в том, что ОТО возникла в некотором смысле слишком рано, Эйнштейн обогнал время. С другой стороны, уже в его работе 1915 года теория была сформулирована в достаточно законченном виде. Не менее важно и то обстоятельство, что наблюдательная база ОТО оставалась очень узкой. Соответствующие эксперименты чрезвычайно трудны. Достаточно напомнить, что красное смещение удалось измерить лишь спустя почти 40 лет после того, как было обнаружено отклонение света в поле Солнца.

Однако в настоящее время ОТО – бурно развивающаяся область современной физики. Это результат огромного прогресса наблюдательной астрономии, развития экспериментальной техники, впечатляющего продвижения в теории.

К сожалению, отразить по-настоящему в одной популярной статье достижения ОТО, по-видимому, невозможно. Я затронул в ней всего лишь несколько сюжетов. Их выбор определялся двумя критериями. Во-первых, степенью важности для понимания теории хотя бы в общих чертах.

Во-вторых, возможностью изложить вопрос без излишней вульгаризации, оставаясь при этом в рамках школьной физики и математики. Разумеется, даже эти сюжеты удалось затронуть только очень бегло. А сколько отнюдь не менее увлекательных тем осталось вообще за пределами статьи!

## Литература для дальнейшего чтения

Тому, кто захочет познакомиться с ОТО более подробно, можно рекомендовать следующие книги, сравнительно доступные для русского читателя:

1. *Нарликар Дж.* Гравитация без формул. Пер. с англ. С.И. Блинникова. – М.: Мир, 1985.

Очень популярный рассказ об основах ОТО и ее современных представлениях.

2. *Новиков И.Д.* Энергетика черных дыр. – М.: Знание, 1986.

Брошюра сочетает изложение одного из самых увлекательных вопросов ОТО с решением красивых задач, вполне доступных для старшеклассников. Относится к лучшим образцам научно-популярной литературы.

3. *Берков А.В., Кобзарев И.Ю.* Теория тяготения Эйнштейна. Общие принципы и экспериментальные следствия. – М.: МИФИ, 1989;

*Берков А.В., Кобзарев И.Ю.* Приложение теории тяготения Эйнштейна к астрофизике и космологии. – М.: МИФИ, 1990.

По существу это две части одной книги. Книга написана физиками для физиков, содержит необходимый минимум математического аппарата. Лучшее введение в ОТО для студентов.

4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1988.

Серьезная классическая книга, пользующаяся мировой известностью. В дальнейших рекомендациях не нуждается.

# Струна рояля и солнечный свет

А. СТАСЕНКО

Доколе свет с вами, веруйте в свет,  
да будете сынами света.

Евангелие от Иоанна 12:36

**П**ОЧЕМУ МУЗЫКАЛЬНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ издают так называемые *музыкальные* звуки, а не беспорядочный шум, как, например, кастрюля, по которой колотят ложкой? Это связано с тем, что инструмент порождает (генерирует) звуки не любых, а определенных частот – так называемые *монохроматические* («одноцветные») тоны.

Если частота звука  $\nu$ , то его длина волны в воздухе будет  $\lambda = v/\nu$ , где  $v$  – скорость звука в воздухе. Длина струны рояля или гитары, так же, как и длина трубки органа, определенно связаны с длиной волны звука  $\lambda$ , который они предназначены издавать. Например, для струны эту мысль поясняет рисунок 1. На нем изобра-

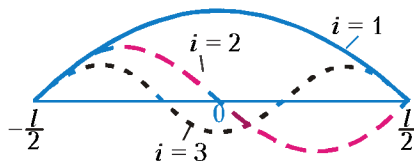


Рис.1

жены три случая изгиба струны (три *моды*), но в любом из них на длине струны  $l$  укладывается целое число полуволн:

$$l = i \frac{\lambda_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Видно, что самая большая длина волны с номером  $i = 1$  равна  $2l$ , а все остальные (соответствующие большему значению  $i$ ) будут меньше. Сам же номер  $i$  показывает, сколько полуволн  $\lambda_i/2$  уместится на длине струны.

А если это не струна, а квадратная пластинка площадью  $l \times l$  (рис.2)? Тогда вдоль каждой из осей  $X$  и  $Y$  может уместиться следующее количе-

ство полуволн:

$$i = 2 \frac{l}{\lambda_i}$$

вдоль оси  $X$  ( $i = 1, 2, \dots$ ),

$$j = 2 \frac{l}{\lambda_j}$$

вдоль оси  $Y$  ( $j = 1, 2, \dots$ ).

Причем речь тут идет не обязательно о независимых волнах, распространяющихся каждая вдоль своей оси.

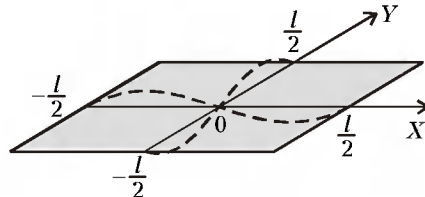


Рис.2

Ведь отрезки  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$  могут принадлежать и одной и той же волне  $\lambda$ , бегущей, например, под углом  $\alpha$  к оси  $X$  (рис.3; сплошные наклонные линии). Тогда

$$\lambda_i = \frac{\lambda}{\cos \alpha} = \frac{2l}{i}, \quad \lambda_j = \frac{\lambda}{\sin \alpha} = \frac{2l}{j}.$$

А как только появляются синус и косинус, возникает непреодолимое желание возвести их в квадрат и

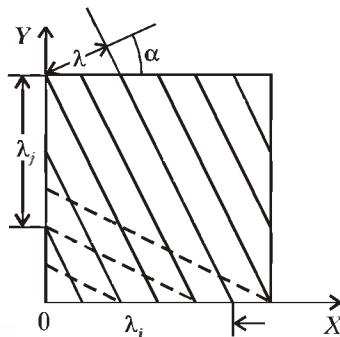


Рис.3

сложить:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 = \frac{\lambda^2}{4l^2} (i^2 + j^2).$$

Сразу видно, что этому соотношению удовлетворяет не единственный набор чисел  $i$  и  $j$ . Например, на рисунке 3 штриховыми линиями показана еще одна волна, для которой имеет место то же самое равенство

$$i^2 + j^2 = 4 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 = R^2. \quad (3)$$

Но ведь это – уравнение окружности радиусом  $R$  в плоскости  $i, j$  (рис.4). Правда, абсцисса и ордината здесь

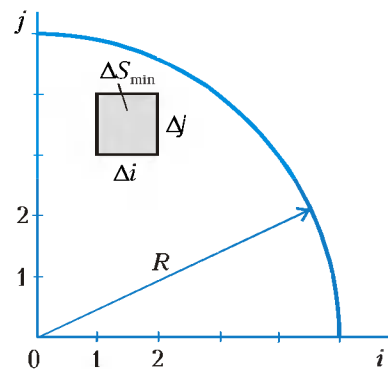


Рис.4

принимают только целочисленные значения, а площадь – «зерниста»: существует наименьшее значение  $\Delta S_{\min} = \Delta i \cdot \Delta j = 1$  (закрашенный квадратик). И радиус окружности измеряется не в метрах – он принадлежит пространству безразмерных чисел. Сколько же таких квадратиков, или пар чисел  $i, j$ , помещается внутри четверти этой окружности? (Почему четверти? Потому что числа  $i$  и  $j$  положительны.) Эта четверть круга называется по-научному первым квадрантом. Ясно, что нужно эту

площадь разделить на  $\Delta S_{\min} = 1$  (т.е. можно и не делить). Получим

$$N \approx \frac{\pi R^2/4}{1} = \pi \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

(Знак « $\approx$ » напоминает, что пол в круглой башне трудно выложить квадратными плитками.)

Перейдем теперь от пластинки к пространственной фигуре. Пусть это будет куб (значит, его высота тоже равна  $l$ ). Теперь звуковые волны могут распространяться не только вдоль осей  $X$  и  $Y$ , но и вдоль оси  $Z$ . Тогда к соотношениям (2) нетрудно добавить еще одно равенство

$$k = 2 \frac{l}{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

так что соотношение (3) примет вид

$$i^2 + j^2 + k^2 = 4 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = R^2,$$

и мы получим уравнение сферы в системе координат  $i, j, k$  (рис.5). Это пространство тоже «зернисто» (как и

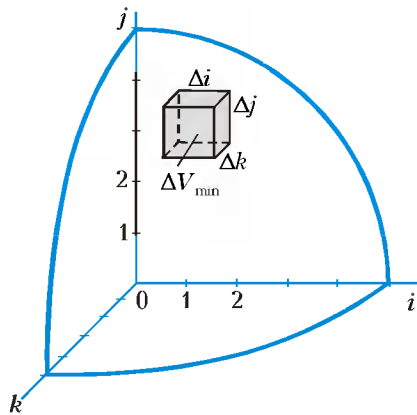


Рис.5

плоскость  $i, j$ ): наименьший объем равен  $\Delta V_{\min} = \Delta i \cdot \Delta j \cdot \Delta k = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ . Значит, внутри осьмушки шара радиусом  $R$  (догадывается, почему осьмушки?), или, по-ученому, первого октанта, помещается число этих объемных «зерен», равное

$$N \approx \frac{(1/8)(4\pi R^3/3)}{1} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^3. \quad (4)$$

Чем меньше  $\lambda$ , тем больше  $N$ . Но каждое «зерно» – набор трех чисел  $i, j, k$  – описывает отдельную волну. Значит, мы нашли и общее количество мод – стоячих волн (с длиной, не превосходящей  $\lambda$ ) – внутри куба со стороной  $l$ .

Но музыкальны не только звуки. «Музыкальны» и электромагнитные

волны, например видимый свет, и эта его «музыкальность» называется цветом, и она тоже характеризуется определенной частотой  $\nu$  или длиной волны  $\lambda = c/\nu$ , где  $c$  – скорость света. Аналогом трубки органа или струны рояля в этом случае может служить лазер, генерирующий монохроматическую волну. Если расстояние между его двумя зеркалами равно  $l$ , то он выдает длину волны, описываемую формулой (1).

А как сделать куб, заполненный излучением? Выкачаем все, что можно (воздух, пары воды, углекислый газ...), из объема  $l^3$ . И что же, этот объем окажется пустым? Совсем нет. Он как раз и будет наполнен так называемым равновесным излучением, соответствующим температуре его стенок  $T$ . При этой температуре стенки будут генерировать в единицу времени столько же лучистой энергии, сколько и поглощать. Каждый кубический сантиметр этого объема будет пронизан электромагнитными волнами, бегущими во всех направлениях. Причем это будут самые разные волны: ..., ультрафиолетовые, видимый свет, инфракрасное излучение, радиоизлучение, ... Конечно, радиоволны не должны иметь длину волны больше чем  $2l$ .

Понятно, что такая нагретая «печка» будет очень слабой радиостанцией, дающей в основном так называемое тепловое (инфракрасное) излучение, но в мартеновских печах, раскаленных до температуры порядка 1000 К, – и видимое (еще более коротковолновое) излучение тоже. Длины электромагнитных волн в этих диапазонах составляют от долей до единиц микрон, поэтому расстояние между двумя соседними линиями (длинами волн)  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$ , определяемыми условием (1), очень мало, и набор значений длин волн (или частот) можно считать не дискретным (перенумерованным), а непрерывным. Тогда на основании соотношения (4) можно сказать, что количество равновесных электромагнитных колебаний, заполняющих объем  $l^3$  «печки», равно

$$N(\lambda) \approx \frac{4\pi l^3}{3\lambda^3} = \frac{4\pi l^3}{3c^3} \nu^3 = N(\nu). \quad (5)$$

Но, как известно, каждый фотон с частотой  $\nu$  несет энергию  $h\nu$  (здесь  $h$  – постоянная Планка). Равновесное излучение иногда называют «газом фотонов». Оно похоже на газ

тем, что фотоны, как и молекулы, летают во всех направлениях. Но, в отличие от молекул, фотоны не сталкиваются друг с другом, а «сталкиваются» лишь со стенками объема. Кроме того, их скорости одинаковы (равны скорости света), так что они, как говорят физики, *распределены по частотам* (а молекулы газа распределены по скоростям). А какова средняя энергия фотонов?

Рассмотрим прежде обычный газ. Пусть концентрация его молекул  $n$ , масса каждой молекулы  $m$ . Как известно, при температуре  $T$  средняя кинетическая энергия молекулы газа  $\frac{m\langle v^2 \rangle}{2}$  пропорциональна  $k_B T$  (здесь  $k_B$  – постоянная Больцмана):

$$\frac{m\langle v^2 \rangle}{2} \sim k_B T. \quad (6)$$

Значит, объемная плотность энергии этого газа равна

$$n \frac{m\langle v^2 \rangle}{2} \sim nk_B T = p,$$

где  $p$  – давление.

Вспомним еще распределение молекул газа по высоте в атмосфере (формулу Больцмана):

$$n = n_0 e^{-\frac{mgy}{k_B T}}$$

Из этой формулы для характерной высоты атмосферы, на которой концентрация молекул в  $e$  раз меньше, чем у поверхности, получается такая оценка:

$$H_e = \frac{k_B T}{mg} = \frac{RT}{Mg} = \frac{8,31 \cdot 300}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} \text{ м} \approx 8,8 \text{ км}.$$

На этой высоте потенциальная энергия равна  $mgH_e = k_B T$ . Любопытно, что это значение является одновременно средней потенциальной энергией молекул изотермической атмосферы:

$$\langle mgy \rangle = k_B T \quad (\text{или } H_e = \langle y \rangle). \quad (7)$$

Согласно общему определению среднего, имеем

$$\langle mgy \rangle N = mg \int_0^{\infty} y n(y) dy,$$

где  $N$  – общее число молекул в столбе атмосферы, опирающемся на единичную



площадку:

$$N = \int_0^{\infty} dn(y).$$

Это соотношение можно переписать и так:

$$\langle mgy \rangle = mg \frac{\int_0^{\infty} y dn(y)}{\int_0^{\infty} dn(y)}.$$

Знаменатель этого выражения равен  $n(\infty) - n(0) = 0 - n_0 = -n_0$  (учтено, что  $n(\infty) = 0$ , т.е. на бесконечности концентрация равна нулю). Числитель легко найти, воспользовавшись тождеством

$$d(y n) = y dn + n dy,$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y dn(y) &= \int_0^{\infty} d(y n) - \int_0^{\infty} n dy = \\ &= y n \Big|_{y=0}^{\infty} - n_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{mgy}{k_B T}} d\left(y \frac{mg}{k_B T}\right) \left(\frac{k_B T}{mg}\right) = \\ &= 0 - n_0 \frac{k_B T}{mg}. \end{aligned}$$

В результате

$$\langle mgy \rangle = k_B T.$$

Формулы (6) и (7) показывают, что средние значения как кинетической, так и потенциальной энергий молекул газа порядка  $k_B T$ . Этот результат оказывается верным и в любом другом случае, когда имеет место термодинамическое равновесие большого количества участников хаотического движения.

А что же равновесное излучение в печке? Согласно условию (1), наибольшая длина волны равна  $\lambda = 2l$ , так что для характерного размера печки  $l \sim 1$  м получим  $\lambda_{\max} \sim 2$  м. Это длина радиоволнового диапазона. Наименьшая длина волны может быть любая, в том числе и из рентгеновского диапазона. Но, конечно, никто не рассматривает печку в качестве радиостанции или рентгеновского аппарата. Из широкого набора частот какое-то значение  $\nu_*$  при данной температуре будет наиболее характерным (чаще всего встречающимся среди фотонов, наиболее вероятным, средним – или придумайте еще какое-либо слово). Сказанное выше позволяет ожидать, что соответствующая энергия фотонов равновесного излучения тоже будет порядка  $k_B T$ ,

т.е.

$$h\nu_* \sim k_B T, \quad (8)$$

а распределение энергии излучения по частотам будет иметь вид колоколообразной кривой (рис.6). Эта кривая показывает, что в области очень

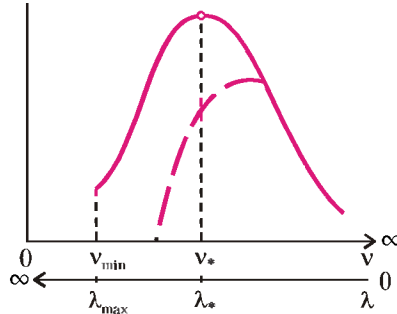


Рис.6

больших и очень малых частот заключено мало энергии, а больше всего – в окрестности характерной частоты  $\nu_* \sim k_B T/h$ . Таким образом, полную энергию равновесного излучения в объеме печки можно оценить выражением

$$U \sim N(\nu_*) \cdot h\nu_* \sim \frac{l^3}{c^3} h\nu_*^4,$$

а плотность энергии (энергию единицы объема) – выражением

$$u = \frac{U}{l^3} \sim \frac{1}{c^3 h^3} (k_B T)^4. \quad (9)$$

Собственно, ради этой зависимости

$$u = \alpha T^4$$

мы и трудились так долго, чтобы не заявлять просто: дескать, существует такой закон имени Стефана и Больцмана – и все тут. (Сразу же отметим, что полученные выражения отражают только размерность искомых величин. Правильное распределение фотонов по частотам описывается так называемой формулой Планка, содержащей безразмерный множитель  $1/(e^{h\nu/k_B T} - 1)$ , – см., например, самый первый номер журнала «Квант». Но для наших целей и этого достаточно, поскольку упомянутая правильная квантово-механическая формула не изменит размерности величины  $u$ .)

Можно сделать и еще одно очень полезное наблюдение – оценить энергию, излучаемую в единицу времени с единицы поверхности нагретого тела. Поскольку мы говорим здесь о равновесном излучении, то, как уже отмечалось выше, сколько энергии

излучается, столько же и падает. Но если плотность энергии равна  $u$ , то, умножив ее на скорость распространения (а это скорость света  $c$ ), мы получим *плотность потока энергии*  $uc$  ( $c$  размерностью  $(\text{Дж}/\text{м}^3)(\text{м}/\text{с}) = \text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ); а коль скоро фотоны летают во всех направлениях с равной вероятностью, грамотный школьник сразу скажет, что в направлении *к поверхности* тела должна двигаться  $1/6$  часть всех фотонов (так как это одно из шести направлений: вперед – назад, вверх – вниз, вправо – влево). Значит, плотность потока энергии *от поверхности* будет равна

$$q = \frac{1}{6} uc \sim \frac{k_B^4}{c^2 h^3} T^4. \quad (10)$$

Это тоже закон Стефана – Больцмана.

Еще более грамотный студент скажет, что нужно написать не  $1/6$ , а  $1/4$ , и будет совершенно прав; но эти тонкости сейчас не существенны. Главное, что мы получили не только закон Стефана – Больцмана  $u = \alpha T^4 \sim q = \sigma T^4$ , где  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана, но и нетривиальную связь коэффициентов пропорциональности в этом законе с фундаментальными физическими константами:

$$\alpha \sim \frac{k_B^4}{c^3 h^3}, \quad \sigma \sim \frac{k_B^4}{c^2 h^3}.$$

Точное значение  $\sigma$ :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{K}^4)$ . Заметим, что эти комбинации фундаментальных констант можно получить (как это не раз и делалось в популярной литературе) на основе соображений размерностей, если известен набор относящихся к делу величин:  $h, k_B, c$ . Мы же здесь постарались этот набор обосновать.

Видно, что зависимость  $q$  от  $T$  очень крутая: при увеличении температуры, скажем, в 2 раза, плотность потока излучения возрастает в 16 раз!

Получив в распоряжение этот закон, было бы обидно не использовать его тут же. Например, можно, оказывается, оценить температуру поверхности Солнца  $T_C$ , зная только, под каким углом  $\theta_C = D_C/L$  виден его диаметр  $D_C$ , и среднюю температуру Земли  $T_3$  (здесь  $L$  – расстояние между Солнцем и Землей). Действительно, со всей поверхности Солнца излучается в единицу времени энергия

$$Q_C = q_C \cdot 4\pi R_C^2 = \sigma T_C^4 \pi D_C^2.$$

Диск Земли площадью  $\pi R_3^2$  «перехватывает» только малую долю этой энергии, равную  $(\pi R_3^2)/(4\pi L^2)$ . И вся эта перехваченная энергия излучается Землей со всей ее поверхности  $4\pi R_3^2$ . Приравнявая падающую на Землю энергию Солнца и энергию, излучаемую Землей, получим

$$\sigma T_c^4 \pi D_c^2 \frac{\pi R_3^2}{4\pi L^2} = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4.$$

Как видим, в этом примере даже не важно знать величину  $\sigma$  — она сокращается. Отсюда

$$T_c = T_3^4 \sqrt{\frac{16}{(D_c/L)^2}} = T_3 \frac{2}{\sqrt{\theta_c}}.$$

Подставляя  $T_3 \approx 300$  К,  $\theta_c \approx 0,5^\circ \approx 10^{-2}$  рад, находим

$$T_c \approx 20T_3 = 6000 \text{ К.}$$

Затем, зная температуру Солнца, можно оценить площадь солнечного паруса космического летательного аппарата, который давал бы, к примеру, силу тяги в 1 ньютон. Пусть он находится на таком же расстоянии от Солнца  $L$ , что и Земля, и пусть его поверхность покрыта тонким зеркальным слоем. Тогда каждый фотон, упав под прямым углом на парус и отразившись от него, изменит свой импульс на величину  $h\nu/c$  —  $(-h\nu/c) = 2h\nu/c$ . Поскольку на всю площадь  $S$  паруса падает в единицу времени энергия (см. предыдущие

рассуждения)

$$Q_{\downarrow} = \sigma T_c^4 \pi D_c^2 \frac{S}{4\pi L^2},$$

то, чтобы найти *поток импульса* всех фотонов (силу  $F$ ), осталось разделить на  $c$  и умножить на 2:

$$F = \frac{2Q_{\downarrow}}{c} = \frac{2}{c} \sigma T_c^4 \theta_c^2 \frac{S}{4}.$$

Отсюда

$$S = \frac{4Fc}{2\theta_c^2 \sigma T_c^4} \approx \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 6000^4} \text{ м}^2 \sim 10^5 \text{ м}^2.$$

Это почти десять гектаров, говоря сельскохозяйственным языком!

А теперь, зная температуру Солнца, можно уточнить соотношение (8). Учитывая, что  $\nu_* = c/\lambda_*$ , перепишем его в виде

$$\lambda_* T \sim \frac{hc}{k_B}.$$

Получаем, что произведение температуры и характерной длины излучения есть некоторая постоянная, состоящая из фундаментальных констант физики. Поскольку температура Солнца примерно 6000 К, а характерная длина волны видимого света порядка 0,5 мкм, эта постоянная оказывается равной приблизительно  $0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} \cdot 6000 \text{ К} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ . Соотношение между температурой и характерной длиной волны излучения, называемое законом Вина, явля-

ется универсальным. Из него следует, в частности, что все предметы при комнатной температуре  $T \approx 300$  К излучают в основном на длине волны  $\lambda_* \approx 3 \cdot 10^{-3}/300 \text{ м} = 10 \text{ мкм}$ , т.е. в инфракрасной области. Поэтому их и не видно «в темноте» (человеческим глазом). Но на их фоне без труда можно было бы рассмотреть «теплого» человека-невидимку при помощи специальных приборов (тепловизоров).

Наконец, можно сделать еще один вывод из приведенных выше соображений. Очень маленькая печка или пылинка, нагретые до некоторой температуры, в условиях термодинамического равновесия должны излучать набор длин волн, ограниченный условием (1): самая большая длина волны будет порядка размеров пылинки. Значит, спектр частот излучения будет «обрезан» со стороны малых частот (что показано качественно на рисунке 6 штриховой кривой), т.е. сдвинут в область «фиолетового» участка спектра. Следовательно, если бы удалось нагреть пылинки до температуры поверхности Солнца, они казались бы (в видимой области) тем более синими, чем меньше их размер.

Все эти соображения учитываются во многих областях науки и человеческой практики, например — при исследовании энергетического баланса звездных и планетных атмосфер, металлургических топков, ракетных струй и т.п.

## «КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

### Груки

*Имя Пита Хэйна широко известно не только на его родине в Дании, но и во всей Скандинавии, и во многих англоязычных странах. Такая популярность не удивительна — XX век вряд ли насчитает много людей, в которых счастливо уживались поэт, романист, эссеист, художник, архитектор и инженер-изобретатель и которые к тому же сумели во всех этих ипостасях проявить себя талантливо.*

*Наибольшую славу П.Хэйну принесли его короткие стихи — груки (название придумано им самим). Он начал писать их во время нацистской оккупации в Дании. Двупланность, двусмысленность груков позволяли датчанам говорить о том, что их действительно волновало. Эта особенность груков сохраняется и впоследствии. Создатель кибернетики Норберт Винер, большой почитатель таланта Хэйна, особенно выделял эту черту: «Его стихи следует читать по крайней мере на двух уровнях — внешнем и более глубоком. И в том и в другом случае они вызывают во мне восхищение. Какое богатство значительных мыслей заключено в них!» Когда Хэйн работал в знаменитом Копенгагенском институте теоретической физики, Нильс Бор избрал именно его своим партнером по «интеллектуальному пинг-понгу». Многие строчки Хэйна стали поговорками, крылатыми словами. Они настолько прочно вошли в обиход, что в свою очередь дали одному критику основание для следующего афоризма: «Блестящий оратор — это человек, способный произнести хорошую речь, ни разу не процитировав Пита Хэйна».*

*П.Хэйн издал около 20 сборников груков — на английском и датском языках. Их популярности в немалой степени способствовали рисунки автора к своим стихотворениям.*

*Предлагаем вам несколько груков с авторскими иллюстрациями.*

*Перевел с английского и подготовил публикацию Г.Варденга.*





# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 – 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1691» или «Ф1698». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1691–М1693 и М1695 предлагались на LXII Московской математической олимпиаде.

Задачи Ф1698–Ф1702 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

## Задачи М1691–М1695, Ф1698–Ф1702

**М1691.** Докажите, что любой четырехугольник можно разрезать на три трапеции.

*В.Произволов*

**М1692.** Числа  $a, b, c$  – длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3.$$

*В.Сендеров*

**М1693.** Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Третья окружность с центром в точке  $P$  пересекает

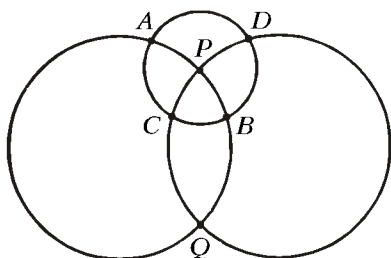


Рис.1

первую в точках  $A, B$ , а вторую – в точках  $C$  и  $D$  (рис.1). Докажите, что углы  $AQD$  и  $BQC$  равны.

*А.Заславский*

**М1694.** Парабола  $y = -x^2 + b_1x + c_1$  и парабола  $y = -x^2 + b_2x + c_2$  касаются параболы  $y = ax^2 + bx + c$ ,

$a > 0$ . Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболам.

*Р.Карасев*

**М1695.** Грани правильного октаэдра раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что для любой внутренней точки сумма расстояний до плоскостей черных граней равна сумме расстояний до плоскостей белых граней.

*Д.Терешин*

**Ф1698.** На рисунке 2 вы видите изображение идущих часов, полученное с помощью компьютерного сканера. Принцип его работы прост. Мощная лампа создает на сканируемом объекте узкую освещенную полоску, а отраженный свет попадает на набор фотодатчиков, которые



Рис.2

расположены в виде линейки, параллельной этой полоске. И лампа, и линейка датчиков расположены на подвижной каретке. Каретка движется с постоянной скоростью, и датчики через равные интервалы времени передают в компьютер изображение. Таким образом, при перемещении каретки получается много «срезов» объекта, из которых и состоит изображение. Пользуясь данным изображением, определите направление и скорость движения каретки сканера, если длина секундной стрелки (от оси до острия) составляет 15 мм.

*А. Селиверстов*

**Ф1699.** Очень легкая жесткая квадратная пластинка подвешена в горизонтальном положении на четырех одинаковых вертикальных нитях, прикрепленных к ее углам. Найдите ту область пластинки, куда можно положить точечный груз таким образом, чтобы все четыре нити в положении равновесия оказались натянутыми. Нити считать упругими, но очень слабо растяжимыми.

*Р. Компанеев*

**Ф1700.** Требуется перевести идеальный газ из состояния 1 с температурой  $T_1$  в состояние 2 с температурой  $T_2 > T_1$  таким образом, чтобы температура в течение всего обратимого процесса  $1 \rightarrow 2$  не убывала, а тепло не отводилось от газа. Минимальное количество теплоты, которое передается газу в таком процессе, равно  $Q_1$ . Какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу при данных условиях проведения процесса?

*О. Шведов*

**Ф1701.** В настоящее время для проведения небольших сварочных работ иногда используют смесь водорода с кислородом, получаемую при электролизе воды. Оцените КПД устройства для электролиза воды, если напряжение между электродами одной его ячейки равно  $U = 2$  В. Известно, что при сгорании  $m = 2$  г водорода в кислороде выделяется  $Q = 0,29$  МДж тепла.

*В. Погожев*

**Ф1702.** Параллельные рельсы длиной  $2L$  закреплены на горизонтальной плоскости на расстоянии  $l$  друг от друга. К их концам подсоединены две одинаковые батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$  (рис.3). На рельсах лежит перемычка массой  $m$ ,

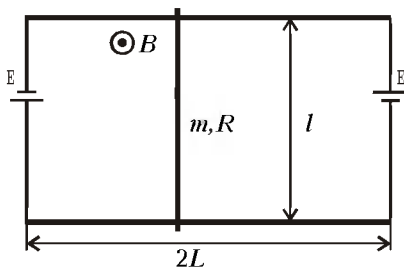


Рис.3

которая может поступательно скользить вдоль них. Вся система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией  $B$ . Считая, что сопротивление перемычки равно  $R$ , а сопротивление единицы длины рельсов равно  $\rho$ , найдите период малых колебаний, возникающих при смещении перемычки от положения равновесия, пренебрегая затуханием, внутренним сопротивлением источников, сопротивлением контактов, а также индуктивностью цепи.

*А. Якута*

## Решения задач М1666—М1675, Ф1683—Ф1687

**М1666.** Три плоскости разрезали куб с ребром 1 на 8 параллелепипедов. Докажите, что среди них найдутся 4 параллелепипеда, объем каждого из которых не превосходит  $1/8$ .

Восемь параллелепипедов имеют одну общую вершину — это точка пересечения трех разрезающих плоскостей. Каждые два из них, имеющих только одну общую вершину, назовем парой. Если длины трех определяющих ребер параллелепипеда равны  $1/2 + x$ ,  $1/2 + y$ ,  $1/2 + z$ , то длины соответствующих ребер парного к нему параллелепипеда равны  $1/2 - x$ ,  $1/2 - y$ ,  $1/2 - z$ . В силу чего произведение объемов двух параллелепипедов, составляющих пару, удовлетворяет неравенству

$$V_1 \cdot V_2 = (1/4 - x^2)(1/4 - y^2)(1/4 - z^2) \leq 1/64.$$

Но тогда хотя бы один из этих объемов не превосходит  $1/8$ .

Так как 8 параллелепипедов распадаются на 4 пары, то в каждой паре найдется хотя бы один параллелепипед с объемом, не превосходящим  $1/8$ .

*Д. Кузнецов*

**М1667.** *Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части. Докажите, что в каждой части можно взять по 100 чисел с равными суммами.*

Так как обе части бесконечны, то найдется бесконечное число пар последовательных натуральных чисел таких, что меньшее число в каждой паре принадлежит первой части, а большее — второй. Точно так же найдется бесконечное число пар последовательных натуральных чисел таких, что большее число в каждой паре принадлежит первой части, а меньшее — второй.

Ввиду этого ясно, что найдется 50 пар первого типа и 50 пар второго типа таких, что все 100 пар попарно не пересекаются. Итого имеем 200 натуральных чисел, 100 из которых принадлежит первой части, а другие 100 — второй, при этом их суммы равны.

*В. Произволов*

**М1668.** *Имеется  $n$  бочек, содержащих 1, 2, ...,  $n$  литров воды соответственно. Разрешается доливать в бочку столько воды, сколько в ней уже есть, из любой другой бочки, в которой воды достаточно для такой операции. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одной бочке, если а)  $n = 10$ ; б)  $n$  — любое число?*

а) **Ответ:** 54 литра. Всю воду (55 литров) нельзя слить в одну бочку. Если бы удалось всю воду слить в одну бочку, то последняя операция состояла бы в сливании двух одинаковых количеств в одно, и получилось бы, что число 55 четно, что неверно.

Получить 54 литра в одной бочке и 1 литр в другой можно, слив сначала всю воду в две бочки и, манипулируя ими, собрать в одной из них 54 литра. Покажем один из способов достижения этой цели. Дополнив из третьей бочки первую, получаем ситуацию (2, 2, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10); затем, удваивая количество воды в первых трех бочках, получим (4, 4, 4, 4, 3, 4, 5, 8, 9, 10). Из бочки с 9 литрами перельем воду в бочку с 5 литрами и после этого объединим воду бочек, содержащих

ших по 10 литров. Затем опустошим три из бочек, в которых по 4 литра, и уберем их. Получим набор (8, 8, 8, 3, 20). Объединив воду бочек с 8 литрами, получим (32, 3, 20). После чего проводим переливания: (32, 3, 20) → (12, 3, 40) → (24, 3, 28) → (24, 6, 25) → (24, 12, 19) → (24, 24, 7) → (48, 0, 7). Уберем пустую бочку и продолжим: (48, 7) → (41, 14) → (27, 28) → (54, 1), что и требовалось получить.

б) Всего в бочках  $k = n(n+1)/2$  литров воды. Если  $k$  нечетное, то, как и в пункте а), легко убедиться, что в одну бочку можно собрать не более  $k-1$  литров воды. Пусть  $k$  – четное число, убедимся, что в одну бочку нельзя собрать всю воду. Для этого применим обратный ход и посмотрим, как выглядит операция обратная к доливанию. Она выглядит так: воду в какой-то бочке делят пополам, после чего две половинки или оказываются в отдельных бочках, или одну из них вливают в какую-то не пустую бочку (а другую половинку оставляют в отдельной бочке).

В результате таких операций из бочки с  $k$  литрами воды можно получить только бочки, в которых  $mk/2^s$  литров воды при некоторых натуральных  $m$  и  $s$  (поскольку есть только деление на 2 и сложение). Значит, в таком виде, в частности, должно представляться и число 1, но число 1 не представляется в таком виде, так как  $k$  не является степенью двойки.

При четном  $k$  в одну бочку нельзя собрать не только  $k$  литров воды, но и  $k-1$  литр воды, так как  $k-1$  нечетное число, а последняя операция перелива могла быть только удвоением.

Таким образом, в случае четного  $k$  в одну бочку можно собрать не более  $k-2$  литра воды, а в случае нечетного  $k$  – не более  $k-1$  литра воды. Осталось убедиться, что эти оценки сверху достижимы. Схема алгоритма достижения такова. Имея две бочки с  $a$  и  $b$  литрами воды, где  $a+b$  нечетно и  $a \equiv 2^m \pmod{a+b}$  при некотором натуральном  $m$ , мы можем получить в этих бочках после переливаний 1 и  $a+b-2$  литров воды, затем 2 и  $a+b-2$ . Далее, воспользовавшись бочкой с 2 литрами воды, «всосем» еще 2 литра из остальных бочек и получим в этих двух бочках 4 и  $a+b-2$  литров воды и т.д.

Таким образом, начав с бочек, в которых 1 и 2 литра воды, будем «всасывать» из остальных по 2 литра, пока во всех остальных бочках в сумме останется 1 или 0 литров воды.

*Р.Женодаров, Г.Челноков*

**M1669.** Натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $ab + bc = ca$ . Докажите равенства

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(b, c) = \text{НОК}(c, a)$$

(НОК – наименьшее общее кратное).

Докажем, что наименьшее общее кратное трех чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  равно наименьшему общему кратному любых двух из них, например чисел  $a$  и  $b$ :  $\text{НОК}(a, b, c) = \text{НОК}(a, b)$ . Этого будет достаточно. Очевидно, что число  $c$  является делителем произведения  $ab$ . Для нашей цели достаточно доказать, что число  $c$  является делителем  $\text{НОК}(a, b)$ . Пусть  $p^m$  – множитель в разложении числа  $c$  на простые множители. При этом  $p^n$  – множитель в разложении числа  $a$ , а  $p^k$  – множитель в разложении числа  $b$ , и  $n+k \geq m$ . Предположим, что  $\max(n, k) > m$ . Так как  $ab = c(a-b)$ , то левая часть равенства делится на  $p^{n+k}$ , а правая – на  $p^{m+\min(n,k)}$ . Но

$n+k < m + \min(n, k)$  – получили противоречие. Значит,  $\max(n, k) \geq m$ , и все доказано.

Дополнительно получим следствие из утверждения задачи. Сначала вспомним, что для любой пары натуральных чисел  $x$  и  $y$  справедливо равенство

$$\text{НОК}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, y) = xy.$$

Тогда следствие выглядит так: если натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  удовлетворяют равенству  $ab + bc = ca$ , то имеет место равенство

$$\text{НОД}(a, b) + \text{НОД}(b, c) = \text{НОД}(c, a).$$

*В.Произволов*

**M1670.** В выгуклом четырехугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны, а стороны  $AB$  и  $CD$  не параллельны. Серединные перпендикуляры к сторонам  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ , лежащей внутри  $ABCD$ . Докажите, что около четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность тогда и только тогда, когда площади треугольников  $ABP$  и  $CDP$  равны.

а) Докажем, что если около  $ABCD$  можно описать окружность, то  $S_{ABP} = S_{CDP}$ . Действительно, в этом случае серединные перпендикуляры к непараллельным сторонам  $AB$  и  $CD$  пересекаются в центре описанной окружности, т.е.  $PA = PB = PC = PD$  (рис.1). Кроме того,  $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$ , так как  $90^\circ = \angle AOB = \frac{1}{2}(\overset{\cup}{\angle A} + \overset{\cup}{\angle C})$ . Значит,  $\sin \angle APB = \sin \angle CPD \Rightarrow S_{ABP} = \frac{1}{2} PA \cdot PB \cdot \sin \angle APB = \frac{1}{2} PC \cdot PD \cdot \sin \angle CPD = S_{CDP}$ .

б) Докажем, что если  $S_{ABP} = S_{CDP}$ , то около  $ABCD$  можно описать окружность.

Пусть это не так, тогда, без ограничения общности,  $PA = PB > PC = PD$ . Проведем окружность радиуса  $PA$  с центром в точке  $P$ . Пусть она пересечет второй раз прямую  $AC$  в точке  $K$ ,  $BD$  – в точке  $L$  (рис.2). Тогда  $K$  и  $C$  лежат по одну сторону от перпендикуляра, опущенного из  $P$  на  $AC$  (так как  $A$  и  $C$ , а также  $A$  и  $K$  лежат по разные стороны от него), значит,  $C$  между  $A$  и  $K$ . Так же  $L$  и  $D$  лежат по одну сторону от перпендикуляра, опущенного из  $P$  на  $BD$ , и  $D$  лежит между  $B$  и  $L$ . Тогда точка  $P$  и отрезок  $KL$  лежат по разные стороны от прямой  $CD$ . Отсюда следует, что если  $PH$  и  $PH_1$  – высоты треугольников  $CPD$  и  $KLP$  соответственно, то  $PH_1 >$

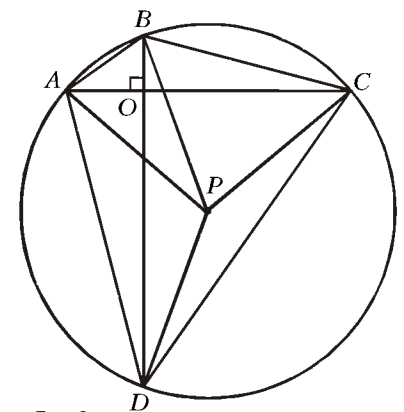


Рис.1

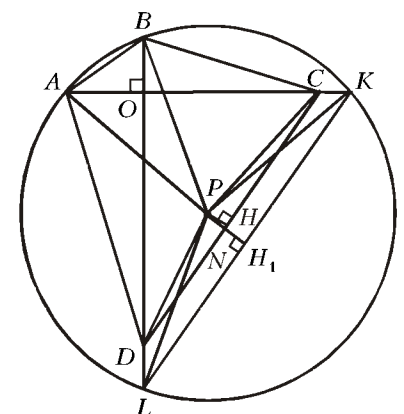


Рис.2



$> PN \geq PH$  ( $N = PH_1 \cap CD$ ). Кроме того,  $CD < KL$ , поэтому  $S_{KPL} = \frac{1}{2}PH_1 \cdot KL > \frac{1}{2}PH \cdot CD = S_{CPD}$ . Но, согласно а),  $S_{KPL} = S_{APB}$ , т.е.  $S_{APD} > S_{CPD}$  – противоречие, значит,  $PA = PB = PC = PD$ , что и требовалось доказать.

И.Аню

**M1671.** На соревновании выступили  $a$  участников, их оценивали  $b$  судей, где  $b$  – нечетное число, не меньшее 3. За выступление участника каждый судья ставил оценку «плюс» или «минус». Число  $k$  таково, что для любых двух судей имеется не более  $k$  участников, получивших у них одинаковые оценки. Докажите неравенство

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Назовем *тройкой* двух судей и одного участника, если оценки, выставленные ему этими судьями, совпадают. Пусть  $l$  – количество различных троек. Оценим  $l$ . С одной стороны, по условию, для любых двух судей существует не более  $k$  троек, включающие этих судей, поэтому

$$k \cdot \frac{b(b-1)}{2} \geq l \quad (1)$$

$\left(\frac{b(b-1)}{2}\right)$  – количество неупорядоченных пар судей).

С другой стороны, если  $b_1$  – количество судей, поставивших некоторому определенному участнику оценку «удовлетворительно»,  $b_2$  – «неудовлетворительно», то этот участник входит в состав  $\frac{b_1(b_1-1)}{2} + \frac{b_2(b_2-1)}{2}$  троек. Но  $b = b_1 + b_2$  – нечетное число, поэтому  $|b_1 - b_2| \leq 1$  и, значит,

$$\frac{b_1(b_1-1)}{2} + \frac{b_2(b_2-1)}{2} = \frac{(b_1+b_2)^2}{4} + \frac{(b_1-b_2)^2}{4} - \frac{b_1+b_2}{2} \geq \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{b}{2} = \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Суммируя эти неравенства по всем  $a$  участникам, получаем

$$l \geq a \cdot \frac{(b-1)^2}{4}. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует

$$k \cdot \frac{b(b-1)}{2} \geq a \cdot \frac{(b-1)^2}{4} \Rightarrow \frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b},$$

что и требовалось доказать.

Д.Шаповалов

**M1672.** Пусть  $d(n)$  – количество всевозможных натуральных делителей числа  $n$ , включая 1 и само  $n$ . Найдите все натуральные числа  $k$  такие, что  $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$  при каком-либо  $n$ .

**Ответ:** в указанном виде представимы все нечетные числа и только они. Докажем вначале, что  $k$  – нечетно. Действительно, если  $n = 1$ , то  $d(n) = d(n^2) = 1 \Rightarrow k = 1$ . Если  $n > 1$ , то  $n = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_s^{r_s}$  (разложение  $n$  по степеням простых чисел),

тогда  $n^2 = p_1^{2r_1} \cdot \dots \cdot p_s^{2r_s}$ , поэтому  $k = \frac{d(n^2)}{d(n)}$  – нечетно, так как числитель этой дроби  $d(n^2) = (2r_1 + 1) \cdot \dots \cdot (2r_s + 1)$  – нечетное число.

Значит,  $k = 2m + 1$ . Индукцией по  $m$  докажем, что для каждого нечетного  $k$  найдется  $n$  такое, что  $k = \frac{d(n^2)}{d(n)}$ , т.е.

$$k = \frac{(2r_1 + 1) \cdot \dots \cdot (2r_s + 1)}{(r_1 + 1) \cdot \dots \cdot (r_s + 1)}. \quad (*)$$

База индукции:  $m = 1$ .  $2m + 1 = 3 = \frac{(2 \cdot 4 + 1) \cdot (2 \cdot 2 + 1)}{(4 + 1) \cdot (2 + 1)}$ .  
Индукционный переход: пусть для всех  $m < M$  каждое число  $2m + 1$  представимо в виде дроби (\*). Докажем, что число  $k = 2M + 1$  также представимо.

Пусть  $k + 1 = 2^l \cdot t$ , где  $t$  – нечетно, тогда  $t = \frac{k+1}{2^l} \leq \frac{k+1}{2} < k$ , так как  $l \geq 1$  и  $k > 1$ . Рассмотрим числа  $r_1, \dots, r_l$  вида  $r_1 = 2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0$ ,  $r_2 = 2^{l+1} \cdot t - 2^1 \cdot t - 2^1$ , ...,  $r_l = 2^{l+l-1} \cdot t - 2^{l-1} \cdot t - 2^{l-1}$ , тогда для  $n_1 = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_l^{r_l}$

$$k_1 = \frac{d(n_1^2)}{d(n_1)} = \frac{(2^{l+1} \cdot t - 2^1 \cdot t - 2^1 + 1) \cdot \dots \cdot (2^{l+l} \cdot t - 2^l \cdot t - 2^l + 1)}{(2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0 + 1) \cdot \dots \cdot (2^{l+l-1} \cdot t - 2^{l-1} \cdot t - 2^{l-1} + 1)} = \frac{2^{2l} \cdot t - 2^l \cdot t - 2^l + 1}{2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0 + 1} = \frac{(2^l - 1)(2^l \cdot t - 1)}{(2^l - 1)t} = \frac{2^l \cdot t - 1}{t}.$$

По предположению индукции, так как  $t < k$ , найдется число  $n_2 = q_1^{r_1} \cdot \dots \cdot q_s^{r_s}$  такое, что  $t$  представимо в виде  $t = \frac{d(n_2^2)}{d(n_2)}$ . Выбрав различные простые числа  $p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_s$ , мы получаем, что для  $n = n_1 \cdot n_2$

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{d(n_1^2)}{d(n_1)} \cdot \frac{d(n_2^2)}{d(n_2)} = k_1 \cdot t = 2^l \cdot t - 1 = k.$$

Переход выполнен.

В.Дремов, Н.Дуров

**M1673\*.** Точка равностороннего треугольника соединена отрезками с его вершинами, а также из нее опущены перпендикуляры на его стороны (рис. 1). Названные отрезки разрезают равносторонний треугольник на шесть прямоугольных треугольников – красные и синие через один. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в красные треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники.

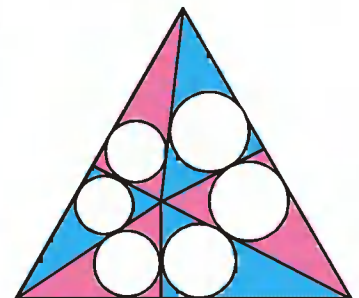


Рис. 1

Доказательство опирается на два вспомогательных утверждения.

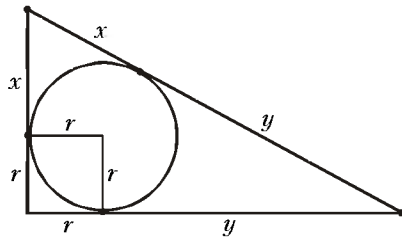


Рис.2

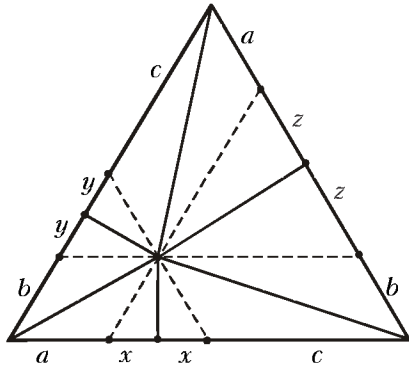


Рис.3

1. Диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен сумме длин катетов минус длина гипотенузы.

Справедливость этого утверждения легко усмотреть из рисунка 2.

2. Сумма длин катетов красных треугольников, лежащих на сторонах равностороннего треугольника, равна сумме длин катетов синих треугольников, лежащих на тех же сторонах.

Справедливость этого утверждения легко усмотреть из рисунка 3.

Теперь, применив первое вспомогательное утверждение к синим и красным треугольникам с учетом второго вспомогательного утверждения, мы получаем требуемое.

В.Произволов

**M1674.** Функция  $f(n)$  определена на множестве натуральных чисел и удовлетворяет условиям

$$f(f(n)) + f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{если } n \text{ четное;} \\ 2n + 1, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Найдите значение  $f(1999)$ .

Так как  $f(n)$  определена на множестве натуральных чисел, а  $f(f(n))$  тоже определена, то естественно заключить, что значения  $f(n)$  принадлежат натуральному ряду чисел.

Вначале рассмотрим случаи  $n = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} f(f(1)) + f(1) &= 3, \\ f(f(2)) + f(2) &= 3. \end{aligned} \tag{1}$$

Отсюда видно, что значения  $f(1), f(2)$  должны принадлежать множеству  $\{1, 2\}$ . Если бы  $f(1) = 1$ , то тогда из первого уравнения следовало бы, что  $f(1) + 1 = 3$ , или  $f(1) = 2$  — противоречие.

Итак,  $f(1) = 2, f(2) = 1$ , что удовлетворяет обоим уравнениям (1).

Аналогичные рассуждения при  $n = 3, 4$  показывают, что  $f(3) = 4; f(4) = 3$ . Эти результаты позволяют выдвинуть предположение:

для любых  $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} f(2n - 1) &= 2n, \\ f(2n) &= 2n - 1. \end{aligned} \tag{*}$$

Докажем эту гипотезу методом математической индукции. Зафиксируем некоторое число  $k \geq 1$  и предположим, что свойство (\*) выполняется для всех  $n \leq k$ . Выведем отсюда, что оно также будет справедливо при  $n = k + 1$ , т.е.

$$f(2k + 1) = 2k + 2,$$

$$f(2k + 2) = 2k + 1.$$

Воспользовавшись определением функции, запишем

$$\begin{aligned} f(f(2k + 1)) + f(2k + 1) &= 4k + 3, \\ f(f(2k + 2)) + f(2k + 2) &= 4k + 3. \end{aligned} \tag{2}$$

Вообще говоря, значения  $f(2k + 1), f(2k + 2)$  могут принадлежать множеству  $\{1, 2, \dots, 2k, 2k + 1, 2k + 2, \dots, 4k + 3\}$ , но «младшие» величины  $1, 2, \dots, 2k$  уже «заняты» значениями  $f(1), f(2), \dots, f(2k)$  и должны быть отброшены. Точно так же должны быть отброшены и «старшие» значения  $2k + 3, 2k + 4, \dots, 4k + 3$ , ибо в противном случае нельзя будет подобрать дополняющую до  $4k + 3$  пару для значения функции  $f(f(2k + 1))$  или  $f(f(2k + 2))$ . Остается лишь одна-единственная возможность  $f(2k + 1) = 2k + 2; f(2k + 2) = 2k + 1$ , которая, как нетрудно убедиться, удовлетворяет уравнениям (2).

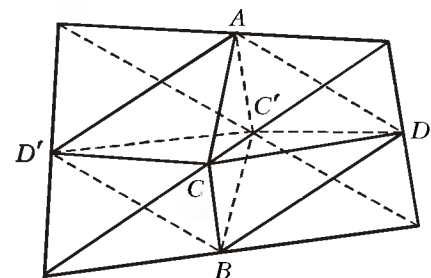
Теперь можно дать ответ на вопрос задачи:

$$f(1999) = 2000.$$

В.Кириак

**M1675\*.** В тетраэдре  $ABCD$ :  $AB = CD = 2, AC = BC = AD = BD = \sqrt{3}$ . Докажите, что его можно разрезать а) на 8; б) на 27 подобных ему и равных между собой тетраэдров.

а) Пусть  $M$  — середина  $AB$ . Тогда  $CM$  и  $DM$  перпендикулярны  $AB$ ,  $CM = DM = \sqrt{2}$ . Следовательно, двугранный угол при ребре  $AB$  прямой. Двугранный угол при ребре  $CD$  также прямой, а остальные двугранные углы равны  $\pi/3$  (в равногранном тетраэдре сумма косинусов двугранных углов при любой грани равна единице). Поэтому четыре тетраэдра, равных данному, можно склеить вдоль ребра  $AB$  в тело  $ACDC'D'B$ , состоящее из двух одинаковых правильных четырехугольных пирамид  $CDC'D'A$  и  $CDC'D'B$ , склеенных основаниями. Ребра  $CD, C'D, CD', C'D'$  этого тела равны 2, и двугранные углы при этих ребрах прямые. Остальные 8 ребер равны  $\sqrt{3}$ , и двугранные углы при них равны  $2\pi/3$ . Поэтому, приклеив затем к граням  $ACD, AC'D', BCD', BC'D'$  этого тела еще по одному тетраэдру, равному данному, получим тетраэдр вдвое большего объема (см. рисунок).

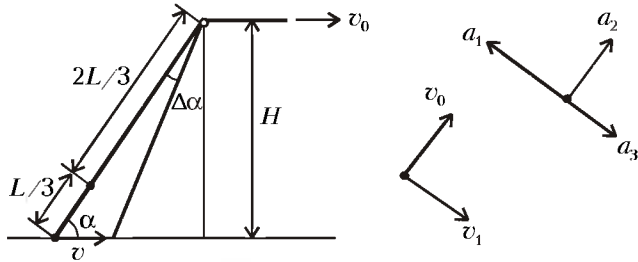


б) Расположим внутри данного тетраэдра четыре тетраэдра, полученных из него гомотетиями с центрами в его вершинах и коэффициентами  $2/3$ . Пересечение трех таких тетраэдров пусто, а любые два пересекаются по тетраэдру, гомотетичному данному с коэффициентом  $1/3$  (центрами гомотетий будут середины ребер тетраэдра). Общий объем четырех тетраэдров равен  $(4 \cdot 8 - 6)/27 = 26/27$  объема исходного тетраэдра, а не занятая ими часть будет тетраэдром с вершинами в центрах его граней. Для завершения доказательства осталось разрезать каждый из четырех тетраэдров в соответствии с п. а).

А.Заславский

**Ф1683.** Мотор на берегу равномерно наматывает на вал веревку, с помощью которой подтягивается к берегу лодка. В данный момент веревка составляет угол  $\alpha$  с горизонтом, а скорость лодки равна  $v$ . На веревке завязан небольшой узелок – в указанный момент он вдвое ближе к носу лодки, чем к валу, на который наматывается веревка. Найдите скорость и ускорение узелка в данный момент времени.

Скорость лодки направлена вдоль поверхности воды (см. рисунок), проекция этой скорости на направление



веревки (нити) равна постоянной по величине скорости наматывания нити на барабан  $v_0$ :

$$v_0 = v \cos \alpha.$$

За малый интервал времени  $\Delta t$  нить повернется на малый угол

$$\Delta \alpha = \frac{v \Delta t \sin \alpha}{L}.$$

Угловая скорость «вращения» нити равна

$$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{v \sin \alpha}{L}.$$

Скорость узелка можно представить в виде векторной суммы поступательной скорости (вдоль нити), равной  $v_0$ , и линейной скорости вращательного движения, равной (с учетом расположения узелка в интересующий нас момент)

$$v_1 = \frac{2}{3} L \omega = \frac{2}{3} v \sin \alpha.$$

Полная скорость узелка в заданный момент будет равна

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{v^2 \cos^2 \alpha + \frac{4}{9} v^2 \sin^2 \alpha} = \frac{v}{3} \sqrt{9 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}.$$

Для нахождения ускорения нам придется задать дополнительную величину, не указанную в условии (из задан-

ных скорости и угла никак не удастся «составить» ускорение – размерность не позволит). Пусть нам известна высота блока  $H$  над поверхностью воды – размеры блока будем считать малыми. Ускорение узелка можно представить в виде векторной суммы трех ускорений: первое связано с поворотом вектора  $\vec{v}_0$ , второе – с поворотом вектора  $\vec{v}_1$  и третье – с увеличением модуля скорости  $\vec{v}_1$ . Первое ускорение – оно перпендикулярно вектору скорости  $\vec{v}_0$  – равно

$$a_1 = v_0 \omega = v_0 \frac{v \sin \alpha}{L} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{H \cos \alpha}.$$

Второе ускорение перпендикулярно линейной скорости вращательного движения, т.е. направлено вдоль нити, и равно

$$a_2 = v_1 \omega = \frac{2}{3} v \sin \alpha \cdot \frac{v \sin \alpha}{L} = \frac{2}{3} \frac{v_0^2 \sin^3 \alpha}{H \cos^2 \alpha}.$$

Третье ускорение направлено вдоль скорости  $\vec{v}_1$ , т.е. перпендикулярно нити, и равно

$$a_3 = \frac{2 v_0 \operatorname{tg}(\alpha + \Delta \alpha) - v_0 \operatorname{tg} \alpha}{3 \Delta t} = \frac{2 v_0 \sin \Delta \alpha}{3 \cos^2 \alpha \cdot \Delta t} = \frac{2 v_0 \omega}{3 \cos^2 \alpha} = \frac{2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{3 H \cos^3 \alpha}.$$

Сложим, с учетом знаков, все ускорения и найдем модуль полного ускорения узелка:

$$a = \sqrt{(a_1 - a_3)^2 + a_2^2} = \frac{2}{3} \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{H} \sqrt{\frac{(1,5 \cos^2 \alpha - 1)^2}{\cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha}.$$

С.Варламов

**Ф1684.** Для снабжения небольшого дома горячей водой применено не самое удачное устройство. Оно состоит из очень большого бака с теплоизоляцией, от которого потребители получают маленькими порциями горячую воду, и автоматического устройства, которое сразу же пополняет бак крутым кипятком. Оказалось, что при стандартном количестве потребляемой воды температура воды в баке составляет  $+60^\circ\text{C}$  при температуре окружающего воздуха  $+20^\circ\text{C}$ . Какая температура установится в баке при увеличении расхода воды вдвое? Теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур.

Пусть за минуту жители потребляют массу воды  $m$ , тогда за это время в бак поступит такая же масса кипятка при температуре  $t_1 = +100^\circ\text{C}$ . Остывая до температуры воды в баке  $t_2 = +60^\circ\text{C}$ , кипяток отдаст количество теплоты  $cm(t_1 - t_2)$ , а бак отдаст столько же тепла в окружающую среду с температурой  $t_3 = +20^\circ\text{C}$ :

$$cm(t_1 - t_2) = K(t_2 - t_3),$$

где  $K$  – постоянный коэффициент.

Если теперь за минуту потребляется  $2m$  воды, то для новой температуры воды в баке  $t$  будет выполняться условие

$$2cm(t_1 - t) = K(t - t_3).$$



Отсюда получаем

$$t = \frac{220}{3} \text{ } ^\circ\text{C} \approx 73 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

На первый взгляд, ответ странный – чем больше потребляешь, тем горячее вода. Но именно так и должно быть в такой системе – просто при увеличении потребления воды за то же время в бак доливается больше кипятка.

А.Зильберман

**Ф1685.** Оцените, на какой высоте над Землей находится центр тяжести столба воздуха, нависающего над стадионом «Лужники». Когда он расположен выше – летом или зимой? При расчете можно считать, что температура воздуха на любой высоте равна температуре земной поверхности.

Проведем несложный расчет. Пусть вначале температура газа очень мала (около нуля по шкале Кельвина), при этом вся атмосфера просто «лежит» на поверхности шара, и высота центра тяжести такого низкого столба воздуха равна нулю. Передадим теперь воздуху некоторое количество теплоты – воздух станет нагреваться и расширяться, причем каждая порция воздуха расширяется при своем неизменном давлении, которое создается весом внешних для этой порции слоев воздуха. (Тут нужно заметить, что толщина атмосферы во много раз меньше радиуса планеты и уменьшением ускорения свободного падения с высотой вполне можно пренебречь.) При таких условиях определенная часть переданного количества теплоты  $Q$  идет на повышение внутренней энергии воздуха  $\Delta U$ , а остальное – на совершение механической работы  $A$ , в данном случае – на поднятие центра тяжести. Для одного моля газа

$$A + \Delta U = Q = C_p \Delta T = (R + C_v) \Delta T,$$

где  $C_p$  и  $C_v$  – молярные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно. В нашем случае температура увеличивается на  $T$  (от нуля до  $T$ ) и работа одного моля газа при расширении равна  $A = RT$ . Для упомянутого в условии задачи столба воздуха для работы по поднятию его центра тяжести на высоту  $H$  можно записать

$$A = \nu MgH = \nu RT,$$

где  $\nu$  – число молей воздуха в указанном столбе,  $M$  – масса моля воздуха. Отсюда легко находим

$$H = \frac{RT}{Mg}.$$

Для летней температуры  $T_1 = 300$  К получим

$$H_1 = \frac{8,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 300 \text{ К}}{0,029 \text{ кг}/\text{моль} \cdot 10 \text{ м}/\text{с}^2} \approx 8,6 \text{ км}.$$

Для зимней температуры  $T_2 = 250$  К –

$$H_2 \approx 7,2 \text{ км}.$$

А.Чувиков

**Ф1686.** Сто батареек с одинаковыми параметрами соединили последовательно, при этом двадцать из них оказались подключены с противоположной к остальным полярностью. Концы получившейся цепочки соединили, получив замкнутое кольцо. Параллельно одной из батареек подключили вольтметр (его сопротивление во много

раз больше внутреннего сопротивления батарейки), и он показал напряжение 1,6 В. Что покажет вольтметр, если его подключить к какой-нибудь другой батарейке?

Если бы все батарейки были включены в одинаковой полярности, показания вольтметра оказались бы нулевыми – напряжение вольтметра определяется разностью ЭДС батарейки и напряжения на ее внутреннем сопротивлении:

$$U = E - IR = E - \frac{NE}{NR} = 0.$$

В нашем случае возможны различные ответы – в зависимости от того, измерялось ли напряжение на батарейке с полярностью включения такой, как у «большинства», или наоборот. В первом случае ответ может быть либо 1,6 В (если и вторая батарейка принадлежит к «большинству»), либо

$$U = -E - \frac{(N - 2n)E}{NR} R = -E - \frac{60E}{100} = -1,6E.$$

Это ровно в четыре раза больше (по модулю) величины

$$E - \frac{(N - 2n)E}{NR} R = 0,4E,$$

которая и соответствует напряжению 1,6 В. Таким образом, вольтметр в первом случае показывает либо 1,6 В, либо 6,4 В.

Во втором случае, когда вольтметр подключался к батарейке из «меньшинства», напряжение на такой же точно батарейке будет тоже 1,6 В, а на «правильной» батарейке – в 4 раза меньше. Итак, в этом случае вольтметр может показать либо 1,6 В, либо 0,4 В.

М.Учителев

**Ф1687.** Точечный источник света движется с постоянной скоростью  $v_0$  по прямой, составляющей небольшой угол  $\alpha$  с главной оптической осью собирающей линзы. Траектория источника пересекается с упомянутой осью на двойном фокусном расстоянии от линзы. Найдите минимальную скорость изображения в линзе относительно движущегося источника.

При указанном в условии задачи расстоянии от линзы до точки пересечения траектории с главной оптической осью (двойное фокусное расстояние) решение получается особенно простым. Изображение движется по прямой, которая составляет тоже угол  $\alpha$  с главной оптической осью (рис.1), так что угол между векторами скоростей источника и изображения равен  $2\alpha$ . Скорость изображения  $v_1$  меняется в очень широких пределах (формально – от

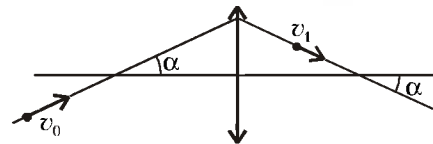


Рис.1

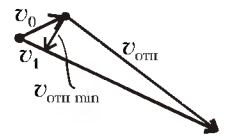


Рис.2

нуля до бесконечности), минимальное значение относительной скорости соответствует моменту, когда вектор  $\vec{v}_{отн}$  перпендикулярен вектору скорости изображения  $\vec{v}_1$  (рис.2). Таким образом, минимальная по величине относительная скорость равна

$$v_{отн \text{ min}} = v_0 \sin 2\alpha.$$

А.Повторов

# Задачи

**1.** Балда договорился с попом отработать на него ровно год и расплатиться щелчками по лбу. Он предложил, чтобы за каждый отработанный день ему



добавлялся один щелчок, а за каждый прогул вычиталось 10 щелчков. Поп же настаивал на более хитром, по его мнению, варианте: за отработанный день начисляется 12 щелчков, а за пропущенный вычитается аж 121 щелчок.

По окончании срока выяснилось, что в обоих случаях поп должен получить от Балды одно и то же число щелчков. Сколько же именно?

*Н.Акулич*

**2.** Шестизначный номер своего телефона я обычно записываю, разбивая цифры на пары и ставя между ними черточку. Эти двузначные числа в номере идут в



порядке убывания, а их произведение равно  $x^x$ , причем цифры  $x$  в номере нет, но среди цифр имеются четыре последовательных числа. Какой у меня номер телефона?

*А.Грук, ученик 8 кл.*

**3.** В противоположных углах квадратной комнаты положили два одинаковых прямоугольных ковра, каждый из которых двумя своими сторонами примыкает к стенам комнаты. Площадь их общей части оказалась равной  $A$ . Затем один из ковров развернули в своем



углу на  $90$  градусов. Площадь общей части стала равной  $B$ .

На сколько длина ковра больше ширины?

*С.Волченков*

**4.** 9 горизонтальных и 9 вертикальных прямых разрезали квадрат на 100 прямоугольников. Среди них оказалось в точности 9 квадратов. Докажите, что среди квадратов найдутся 2 равных.

*В.Произолов*



**5.** 16 карточек занумеровали от 1 до 16. Можно ли их выложить вдоль одной прямой так, чтобы сумма номеров на любых двух соседних карточках была точным квадратом?

*Из журнала «Mathematics Teacher»*



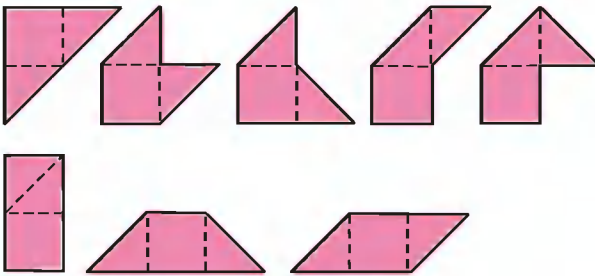
*Иллюстрации Д.Гришуковой*

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6—8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высыпайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены грамотами и призами журнала.

1. Каждая из восьми нарисованных фигурок состоит из единичного квадрата и двух его «половинок» – прямоугольных треугольников. Можно ли из них сложить



квадрат  $4 \times 4$  (фигурки разрешается переворачивать)?

Н.Авилов

2. а) Имеется бесконечный лист клетчатой бумаги. В начальный момент на одной из клеток находится микроб *первого поколения*. Через секунду в двух соседних с ним клетках появляется по одному микробу *второго поколения*. Еще через секунду в двух соседних клетках с каждым микробом второго поколения появляется по микробу *третьего поколения*. Еще через секунду в двух соседних клетках с каждым микробом третьего поколения появляется по микробу *четвертого поколения* и так далее (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). При этом не допускается, чтобы в какой-либо клетке оказалось более одного микроба. Какое наибольшее число поколений может оказаться на листе?

- б) Тот же вопрос, если соседними считаются также и клетки, имеющие общую вершину.

И.Акулич

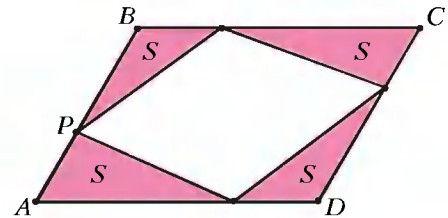
3. Найдите все натуральные  $x > 1$  такие, что

а)  $x^2 + 1 = \overline{22\dots 2}$  (число  $x^2 + 1$  записывается одними двойками);

б)  $x^2 + 1 = \overline{77\dots 7}$  (число  $x^2 + 1$  записывается одними семерками).

В.Сендеров

4. На стороне  $AB$  параллелограмма  $ABCD$  задана точка  $P$ . Постройте вписанный параллелограмм с вершиной в



точке  $P$ , стороны которого отсекают от параллелограмма  $ABCD$  четыре треугольника равной площади.

В.Произволов

5. Укажите бесконечное множество пар чисел таких, что сумма чисел каждой пары равна их произведению, причем одно из этих чисел – целое, а другое – рациональное.

Из журнала «Mathematics Teacher»

## Очень Важный Вопрос

А.КОТОВА

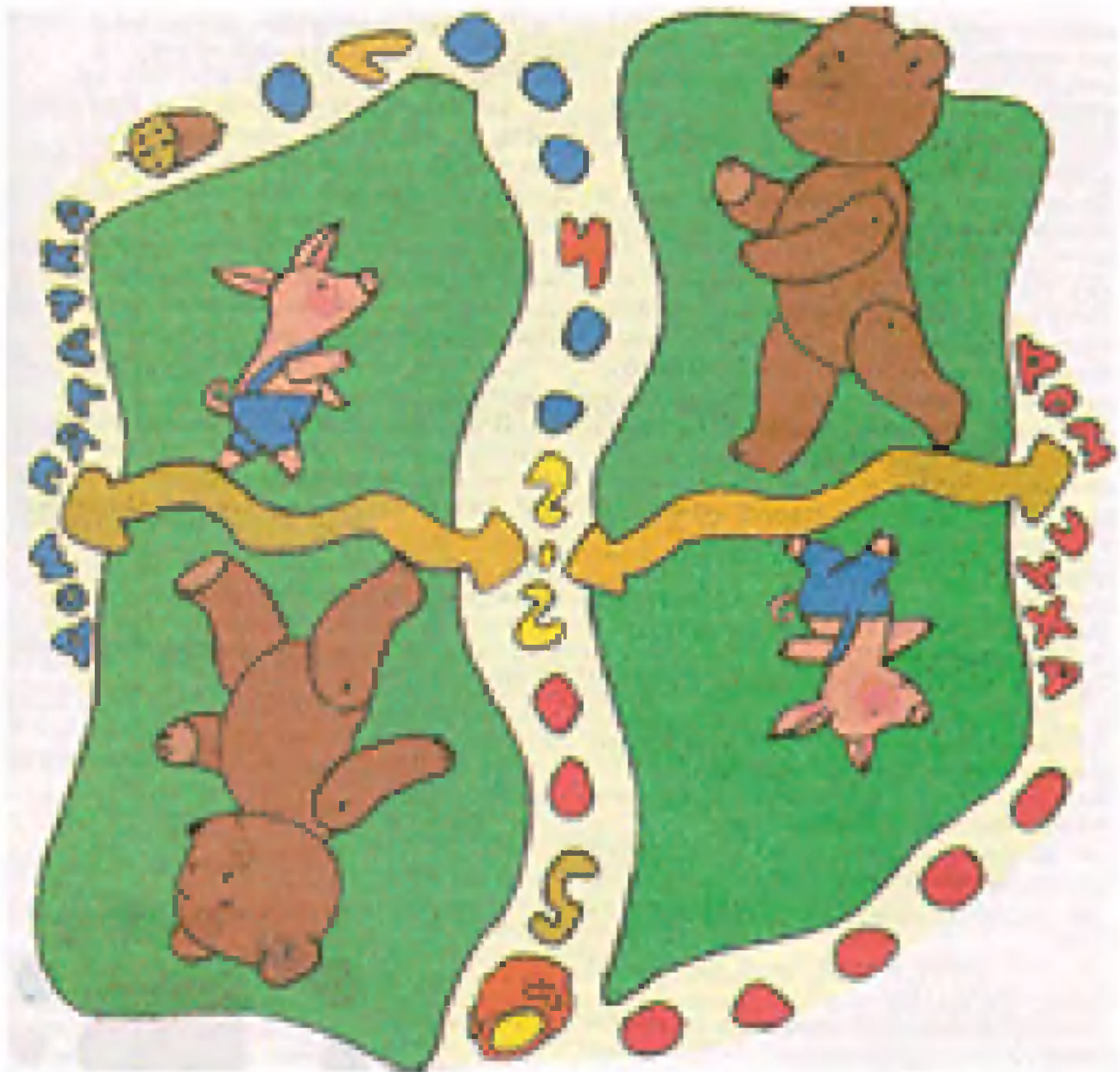
ОДНАЖДЫ УТРОМ (КАЖЕТСЯ, ЭТО БЫЛО в прошлую пятницу) Винни-Пух проснулся и почувствовал, что неплохо было бы чем-нибудь подкрепиться. Он полез на полку, где – он очень хорошо это помнил – вчера оставалось немного меду в горшочке с надписью «Миот». Но меда не было.

– Очень странно, – сказал Винни-Пух. – Куда же делся мой мед?.. Ах да, я ведь вчера ходил в гости к Пятачку и, наверное, отнес мой горшок с медом туда. Надо пойти проверить.

И он направился к дому Пятачка.

В тот же самый момент Пятачок спохватился, что они с Пухом собирались обсудить один Очень





Важный Вопрос. Правда, Пятачок никак не мог вспомнить, какой именно.

– Нужно скорее пойти к Пуху, – сказал Пятачок. – Он ведь очень умный медведь, хотя у него в голове опилки. А я такое маленькое существо, что Очень Важному Вопросу, наверное, было тесно в моей голове и он пошел прогуляться.

И Пятачок побежал к дому Винни-Пуха.

Всю дорогу до дома Пятачка Пух сочинял Утреннюю Ворчалку, которую нужно ворчать до завтрака, потому что после хорошего завтрака ворчалки не годятся. Нужны кричалки и вопилки! Но ворчалка никак не вытанцовывалась, и Пух совсем не смотрел по сторонам, а только бормотал себе под нос:

– Тум – турум – турум – бурум...

Нет, не так...

Тум – бурум – тум – тум – турум...

Опять не так...

Тут он на кого-то налетел, вежливо сказал «извините» и поспешил дальше, продолжая сочинять Утреннюю Ворчалку.

Пятачок очень спешил, но на бегу все пытался вспомнить Очень Важный Вопрос. «Может, надо было обсудить, что едят Слонопотамы по воскресеньям?.. Нет, об этом мы поговорили вчера... Может, про то, как нужно играть в пустяки?.. Нет, это не Очень Важный Вопрос... Может, куда делся хвост Иа?.. Ах, нет, хвост Иа уже нашелся...»

Тут Пятачок с разбегу врезался во что-то мягкое и пушистое, пропищал «извините, пожалуйста, я нечаянно» и помчался дальше.

Через минуту после столкновения Винни-Пух подошел к дому Пятачка и позвонил в дверь. Никто не ответил.

– Пятачок, ты дома? – на всякий случай спросил Пух. Никто не ответил и на этот раз.

– Ну вот, когда он так нужен, его нет дома, – пожаловался Пух закрытой двери и повернул обратно.

Через четыре минуты после столкновения Пятачок прибежал к дому Пуха и обнаружил, что Пуха дома нет.

– Я уже почти вспомнил Очень Важный Вопрос, – укоризненно сказал Пятачок, – а обсуждать-то его, оказывается, не с кем! Ай-я-яй! – и, покачав головой, повернул к своему дому.

Через некоторое время Пятачок увидел Пуха, который шел ему навстречу, сердито ворча:

– Куда девался Пятачок?

Турум-бурум, турум-бурум...

Нет, не так...

– Привет, Пух! – радостно закричал Пятачок. – А я все утро тебя ищу! Но тебя нет дома!

– Ну, положим, тебя тоже нет дома, – ответил Пух. – Доброе утро, Пятачок!

– Ты знаешь, я все думал о том Очень Важном Вопросе... – начал Пятачок, надеясь, что Пух скажет: «Ах, об этом Вопросе!» – и напомним, наконец, что же был за Вопрос.

– Ах, об этом Вопросе! – сказал Пух, пытаясь сообразить, что имеет в виду Пятачок.

– Ну да, о том самом Вопросе, – повторил Пятачок.

– Ну, не думаю, что это такой уж Важный Вопрос, – ответил Пух.

– Конечно, есть и более Важные, – согласился Пятачок.

– Да, кстати, – сказал Пух. – Я тут на кого-то налетел, ты не знаешь, на кого?

– Какое совпадение, – сказал Пятачок. – И я как раз недавно на кого-то налетел, когда шел к тебе.

– Слушай, Пятачок, – догадался Пух, – может, ты налетел на меня?

Пятачок задумался.

– Может быть, – сказал он наконец. – Как раз за четыре минуты до того, как подошел к твоему дому.

– Нет, тогда не на меня, – заметил Пух. – Я с кем-то столкнулся всего за одну минуту перед тем, как подошел к твоему дому.

– Ой, Пух, – прошептал Пятачок, – может быть, это был Слонопотам?

– Не думаю, – успокоил его Пух. – Слонопотамы всегда спят до обеда... Кстати, Пятачок, не пора ли нам подкрепиться?

– Можно, – согласился Пятачок. – Только у меня совсем нет меда.

– А знаешь, – задумчиво сказал Пух, – вот у Кристофера Робина наверняка есть мед!

– И желуди! – радостно пискнул Пятачок.

И они отправились к своему другу Кристоферу Робину, чтобы немного подкрепиться.

За завтраком они рассказали Кристоферу Робину, как все утро друг друга искали и на кого-то натыкались.

– Ах ты, глупенький мой мишка, – ласково сказал Кристофер Робин, – наверное, вы столкнулись с Пятачком. Просто ты был ближе к дому Пятачка, чем к своему, когда это случилось.

– Значит, я шел в гости к Пятачку всего пять минут? – задумчиво спросил Пух.

– Почему пять? Разве ты ходишь с той же скоростью, что Пятачок?

– Нет, я, пожалуй, хожу побыстрее... – ответил Пух. – Но я был очень занят ворчалкой и не знаю, сколько времени я шел.

– А я? Сколько я бежал? – спросил Пятачок.

Кристофер Робин задумался.

– А знаете, – наконец сказал он, – это, наверное, тоже Очень Важный Вопрос, потому что я не могу на него ответить.

И все они стали думать, и думали очень долго, до самого чая.

А вы можете ответить на этот Очень Важный Вопрос?



# Несколько задач для 11-классников

О.ИВАНОВ, Т.ИВАНОВА

В ДАННОЙ СТАТЬЕ РЕЧЬ ИДЕТ О «почти школьных задачах», в каждой из которых в формулировке имеется элемент неожиданности. По духу они близки задачам олимпиад 50–60-х годов (а некоторые просто были позаимствованы из различных сборников, содержащих варианты олимпиад тех лет).

**Задача 1.** Найдите все целые  $k$ , при которых разрешимо уравнение

$$\sqrt{\arcsin x} + \sqrt{\arccos x} = \sqrt{\frac{k}{10}}.$$

**Решение.** Не следует пугаться присутствующих в условии обратных тригонометрических функций. Поскольку

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ , то после замены  $t = \arcsin x$  получим уравнение

$$\sqrt{t} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - t} = \sqrt{\frac{k}{10}}, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Полученное уравнение разрешимо, если число  $\sqrt{\frac{k}{10}}$  входит в множество значений

функции  $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - t}$ . Для его нахождения можно стандартным образом исследовать функцию при помощи производной, а можно воспользоваться оценками

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} \quad (a, b \geq 0);$$

заметим, что эти неравенства обращаются в равенства, соответственно, при  $a = 0$  или  $b = 0$  и  $a = b$ . Следовательно, множеством значений функции  $f$  является отрезок  $\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\pi}\right]$ . Значит, решение исходного уравнения существует тогда и только тогда, когда  $5\pi \leq k \leq 10\pi$ , откуда получаем ответ:  $k = 16, 17, \dots, 31$ .

**Задача 2.** Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а боковое ребро – двум.

**Решение.** Вместо того чтобы пытаться выразить площадь проекции через площади граней пирамиды с использованием формулы  $S_{\text{пр}} = S \cos \theta$ , лучше посмотреть, что представляет из себя проекция данной пирамиды. Возможны два случая. В первом из них проекция является треугольником – проекцией одной из граней пирамиды, во втором она – четырехугольник, диагоналями которого являются проекции некоторых двух скрещивающихся ребер. Ясно, что в первом случае площадь проекции наибольшая, если мы проектируем нашу пирамиду на плоскость, параллельную той ее грани, которая имеет наибольшую площадь; в нашем случае это грань со сторонами 1, 2, 2, ее площадь  $\frac{1}{4}\sqrt{15}$ . Второй случай более интересен. Площадь четырехугольника равна  $\frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$ , где  $d_1, d_2$  – это длины его диагоналей, а  $\alpha$  – угол между ними. Ясно, что  $d_1 \leq 1, \sin \alpha \leq 1, d_2 \leq 2$ , поэтому произведение всех этих величин не превосходит двух. Осталось заметить, что поскольку скрещивающиеся ребра правильной пирамиды перпендикулярны друг другу, то при проектировании на параллельную им плоскость площадь проекции равна единице, что больше  $\frac{1}{4}\sqrt{15}$ . Таким образом, ответ: 1.

**Задача 3.** Задумав жениться, Иван открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 10000 рублей. Сколько денег на семейный отдых он сможет тратить через 8 лет, если будет далее брать только проценты с накопившейся за это время на его счету суммы? Банк дает 30% годовых; считайте, что  $\lg 1,3 = 0,114$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Прочитав формулировку задачи, один из наших коллег сказал, что ответ – «ничего», поскольку банк, который выдает такой процент, заведомо прогорит. И, как мы увидели на практике, он оказался прав. Но это уже совсем другая наука...

**Решение.** Конечно, можно прямо подсчитать, сколько же денег на счету окажется у Ивана через 8 лет. Заметим, что проделать аналогичное вычисление при решении задачи 2, г) варианта 2 (в конце статьи) будет более затруднительно, не говоря уже о том, что делать это без калькулятора просто глупо.

Мы проведем вычисления в общем виде, воспользовавшись численными данными лишь на заключительном этапе решения. Итак, пусть  $a$  – вносимая Иваном ежегодно сумма, а  $\alpha$  – начисляемый годовой процент. В первый год он внес  $a$  рублей, так что после начисления годовых процентов через год у него на счету будет  $a + a \frac{\alpha}{100} = a \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$  рублей. Удобно ввести дополнительное обозначение  $q = 1 + \frac{\alpha}{100}$ , так что если некто имел на счету в начале года  $s$  рублей, то после начисления процентов у него окажется  $sq$  рублей. Вернемся к Ивану. После того, как он в конце первого года снова внес свои  $a$  рублей, у него на счету стало их  $a + aq$ ; в конце второго года их станет (после очередного взноса)  $a + (a + aq)q = a + aq + aq^2$ . Теперь уже ясно, что сумма, скопившаяся на счету Ивана за 8 лет, равна  $a + aq + \dots + aq^8$ , ежегодные проценты с которой составляют

$$(q-1)(a + aq + \dots + aq^8) = a(q^9 - 1) \text{ рублей.}$$

В нашем случае  $q = 1,3, q^9 = 1,3^9 = 10^{9 \lg 1,3} > 10$ , так как  $9 \lg 1,3 = 9 \cdot 0,114 > 1$ . Поэтому имеется по крайней мере 90000 рублей ежегодного дохода в распоряжении Ивана и всех его будущих наследников.

**Задача 4.** Докажите, что если  $a_i > 0, a_i c_i \geq b_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ), то

$$(a_1 + a_2 + a_3)(c_1 + c_2 + c_3) \geq (b_1 + b_2 + b_3)^2.$$

**Решение.** Решим задачу для произвольного количества  $n$  чисел  $a_i, b_i, c_i$ . Введем квадратные трехчлены  $q_i(x) = a_i x^2 + 2b_i x + c_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Так как по условию  $a_i > 0$  и  $a_i c_i \geq b_i^2$ , то  $q_i(x) \geq 0$  при всех  $x \in \mathbf{R}$ . Значит,

$$\sum_{i=1}^n q_i(x) = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) x^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) x + \sum_{i=1}^n c_i \geq 0,$$



откуда и следует неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n c_i \geq \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)^2.$$

**Задача 5.** Решите неравенство

$$\sqrt{|1-2x|} \geq 1+ax.$$

**Решение.** Очень хотелось бы посмотреть на школьника, который сумеет записать верное решение этой задачи, не используя ее геометрической интерпретации. Насколько трудно это сделать, видно хотя бы из ответа. Чтобы он не был совсем уж неудобочитаемым, положим для краткости записи

$$x_1 = \frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{a^2},$$

$$x_2 = \frac{1-a+\sqrt{1-2a-a^2}}{a^2},$$

$$x_3 = -\frac{2a+2}{a^2}.$$

Ответ:

- $x \in [0; +\infty)$  при  $a \leq -2$ ;
- $x \in [0; x_3] \cup [x_1; +\infty)$  при  $2 < a < -1$ ;
- $x \in [x_3; 0] \cup [x_1; +\infty)$  при  $-1 \leq a < 0$ ;
- $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$  при  $a = 0$ ;
- $x \in (-\infty; 0] \cup [x_1; x_2]$  при  $0 < a \leq \sqrt{2}-1$ ;
- $x \in (-\infty; 0]$  при  $a > \sqrt{2}-1$ ;

решение понятно из серии графиков, изображенной на рисунке 1.

**Задача 6.** Сколько различных каркасов треугольных пирамид можно составить из зеленых стержней длиной по 33 см каждый и красных стержней длиной по 20 см?

**Решение.** Давайте вначале решим более простую задачу. Предположим, что зеленые и красные стержни имеют одинаковую длину. Составим таблицу,

в которой в верхней строке указано число зеленых стержней, а в нижней – число различно окрашенных пирамид с таким числом зеленых стержней:

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	2	1	1

Не кажется ли вам странным число «4» в средней клетке этой таблицы? Действительно, три зеленых стержня могут: а) выходить из одной вершины; б) образовывать треугольник; в) образовывать незамкнутую пространственную ломаную. Однако оказывается, что в случае в) имеются две различные конфигурации, правая и левая (рис.2)!

Задача в ее исходной постановке отличается от только что разобранной

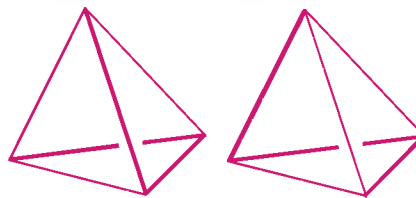


Рис. 2

тем, что в ней необходимо исследовать вопрос о существовании пирамиды с данными длинами ребер в каждом из рассмотренных выше случаев. К примеру, пирамида, в которой отрезки длиной  $a$  образуют треугольник основания, а отрезки длиной  $b$  выходят из вершины пирамиды, существуют тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$a < b\sqrt{3}. \quad (1)$$

Поскольку в нашем случае  $20\sqrt{3} > 34 > 33$ , то существуют пирамиды как с зеленым, так и с красным основаниями. Далее, пирамида, в которой одно ребро имеет длину  $a$ , а остальные – длину  $b$ , также существует тогда и

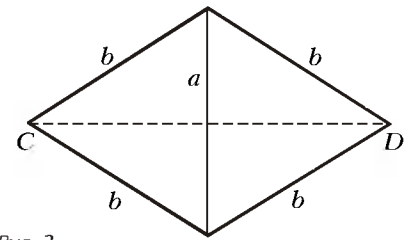


Рис. 3

только тогда, когда выполнено неравенство (1), поскольку для этого нужно, чтобы  $CD < b$  (рис.3). Убедитесь, что не существует пирамиды, три ребра которой образуют незамкнутую ломаную. Наконец, есть еще один запрет, так что ответ в данной задаче: 9 пирамид.

**Задача 7.** Каждая из граней куба закрашивается целиком белым или черным цветом. Раскраски двух кубов называются одинаковыми, если эти кубы невозможно различить (при этом их разрешается вращать в пространстве).

а) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании куба все его противоположные грани имеют различные цвета.

б) Сколько всего существует различных раскрасок куба?

в) Два художника по очереди закрашивают по одной грани куба. Раскрасив один куб, они принимают за следующий. Докажите, что второй может добиться, чтобы все кубы оказались одинаково раскрашенными.

г) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании двух кубов их раскраски оказались одинаковыми.

**Решение.** а) Поскольку вероятность того, что одна пара противоположных граней раскрашена в противоположные цвета, равна  $\frac{1}{2}$ , а таких пар три, то ответ:  $\frac{1}{8}$ .

б) Ответ: всего имеется десять различных раскрасок. Действительно, имеется по одной раскраске с числом белых граней, равным 0, 1, 5 или 6, и по две раскраски, если таковых граней 2, 3 или 4.

в) Вторым художником может действовать по следующему алгоритму: он раскрашивает грань, противоположную той, которую перед этим закрасил первый, причем красит ее противоположным цветом.

г) Ответ:  $\frac{147}{1024}$ . Если удалось получить это число, то «с вероятностью 1» вы рассуждали правильно...

**Задача 8.** Дан многочлен  $p(x) = ax^{1998} + bx^{1917} + c$ ,  $a \neq 0$ . Найдите все целые  $a, b, c$ , при которых  $p(n)$  делится на  $(n-1)^2$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ .

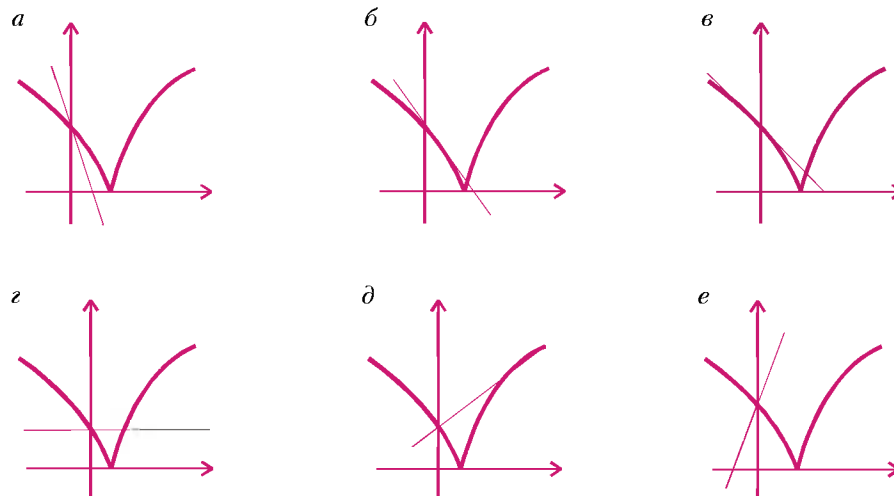


Рис. 1



**Решение.** Ясно, что если 1 является корнем многочлена  $p(x)$  кратности не меньшей двух, т.е.  $p(x) = (x-1)^2 d(x)$ , то коэффициенты многочлена  $d$  суть целые числа, а потому при всех  $n \in \mathbf{N}$  число  $\frac{p(n)}{(n-2)^2}$  — целое. Далее, для того чтобы кратность корня  $a$  многочлена  $p$  была не меньше двух, необходимо и достаточно, чтобы  $p(a) = 0$  и  $p'(a) = 0$ . Поэтому в условиях задачи мы получаем, что числа  $a, b, c$  должны быть решениями системы

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 1998a + 1917b = 0. \end{cases}$$

Поскольку  $1998 = 27 \cdot 74$ ,  $1917 = 27 \cdot 71$ , то отсюда следует, что  $a = 71k$ ,  $b = -74k$ , где число  $k$  — целое, а  $c = 3k$ .

Ответ —  $(a, b, c) = (71k, -74k, 3k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , — верен, однако полного решения пока нами не получено. Действительно, то, что 1 — корень многочлена  $p$  кратности по крайней мере два, это достаточное условие делимости  $p(n)$  на  $(n-1)^2$ . Для того чтобы показать, что задача других решений не имеет, достаточно доказать следующее утверждение.

**Лемма.** Пусть  $p(x), q(x)$  — многочлены с целыми коэффициентами. Если при всех натуральных  $n$  число  $p(n)$  делится на  $q(n)$  (или же при некоторых значениях  $n$  оба этих числа одновременно обращаются в нуль), то многочлен  $p(x)$  делится на многочлен  $q(x)$ .

Самое интересное в доказательстве данного утверждения состоит в том, что оно во многом основано на аналитическом, а не на алгебраическом рассуждении.

Вначале разделим  $p(x)$  на  $q(x)$  с остатком:

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x), \quad (2)$$

где степень многочлена  $r$  меньше степени многочлена  $q$ .

Предположим, что  $r(x) \neq 0$ . Будем далее рассматривать настолько большие числа, что  $q(n) \neq 0$ ,  $r(n) \neq 0$ . Положим  $k_n = \frac{p(n)}{q(n)} \in \mathbf{Z}$ . Из равенства (2) следует, что

$$k_n - d(n) = \frac{r(n)}{q(n)}.$$

Заметим теперь, что левая часть этого равенства есть целое число, что противоречит тому, что его правая часть отлична от нуля, но стремится к нему при  $n \rightarrow \infty$ .

В заключение приведем для самостоятельного решения наборы задач, пред-

лагавшихся выпускникам школ Санкт-Петербурга в 1998 году.

### Вариант 1

(профильно-элитарный экзамен)

1. Дана функция  $f(x) = \log_{x+1} ax$ .

а) Известно, что  $x = 1$  — корень уравнения  $f(x) = 3$ . Найдите  $a$  и остальные корни этого уравнения.

б) Пусть  $a = \frac{9}{2}$ . Решите неравенство  $f(x) \geq f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

в) Найдите все  $a$ , при которых уравнение  $f(x) = 3$  имеет единственное решение.

г) Докажите, что если уравнение  $f(x) = n + 1$  ( $n$  — натуральное) имеет положительный корень, то  $a > ne$ .

2. Дана функция  $f(x) = \sin ax \sin x$ .

а) Пусть  $a = 3$ . Решите уравнение  $\frac{f(2x)}{f(x)} = -2$ .

б) Найдите все  $a$ , при которых  $\int_{\pi}^{\pi} f(x) dx \geq 0$ .

в) Пусть  $x_a$  — наименьший положительный корень уравнения  $f(x) = \cos x$ . Найдите наименьшее значение  $x_a$ .

г) Найдите все  $a$ , при которых  $f(x) \geq \frac{1}{2}$  при всех  $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

### Дополнительная задача

(выбирается один из трех сюжетов)

3А. Даны многочлены  $p(x) = ax^{1998} + b$  и  $q(x) = cx^{1917} + d$ ,  $a \neq 0$ .

а) Найдите наибольшее возможное число действительных корней уравнения  $p(x) = q(x)$ .

б) Пусть  $a = 71$ ,  $b = 3$ ,  $c = 74$  и  $d = 0$ . Решите уравнение  $p(x) = q(x)$ .

в) Пусть  $b = 0$ ,  $c = 1$ . Найдите все целые  $a, d$ , при которых число  $p(n)$  делится на  $q(n)$  при всех  $n \in \mathbf{N}$ .

г) Пусть  $d = 0$ . Найдите все целые  $a, b, c$ , при которых разность  $p(n) - q(n)$  делится на  $(n-1)^2$  при всех  $n \in \mathbf{N}$ .

3Б. Каждая из граней куба закрашивается целиком белым или черным цветом. Раскраски двух кубов называются одинаковыми, если эти кубы невозможно различить (при этом их разрешается вращать в пространстве).

а) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании куба все его противоположные грани имеют различные цвета.

б) Сколько всего существует различных раскрасок куба?

в) Двое по очереди закрашивают по одной грани куба. Раскрасив один куб, они принимаются за следующий. Дока-

жите, что второй из них может добиться, чтобы все кубы оказались одинаково раскрашенными.

г) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании двух кубов их раскраски оказались одинаковыми.

3В. Дан многочлен  $p(z) = z^3 + az + b$ ,  $a, b, z \in \mathbf{C}$ .

а) Пусть  $a = -i$ ,  $b = 1 - i$ . Найдите корни многочлена  $p(z)$  (и запишите их в алгебраической форме).

б) Найдите все пары  $(a, b)$ , при которых один из корней многочлена  $p(z)$  совпадает с серединой отрезка между двумя другими (здесь и в следующем пункте мы отождествляем комплексные числа с точками плоскости).

в) Найдите все пары  $(a, b)$ , при которых корни многочлена  $p(z)$  лежат в вершинах равностороннего треугольника.

г) Докажите, что если  $|p(z)| \leq 1$  при всех  $|z| = 1$ , то  $a = b = 0$ .

### Вариант 2

(олимпиада выпускников)

1. а) Докажите, что если каждая из диагоналей четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника, то этот четырехугольник — параллелограмм.

б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а плоские углы при вершине прямые.

в) Докажите, что если  $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$ , то по крайней мере один из квадратных трехчленов  $x^2 + p_i x + q_i$ ,  $i = 1, 2$ , имеет действительный корень.

2. а) Нарисуйте график функции  $f(x) = 2x + |\log_2 x + 2x| - \log_2 x$ .

б) Решите уравнение  $\sqrt{2 - \cos 2x} = \sin x - \cos x$ .

в) Решите неравенство  $\sqrt{|1 - 2x|} \geq 1 + ax$ .

г) Для того чтобы обеспечить себя в старости, Джон открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 2000\$. Достаточно ли ему копить деньги 27 лет, чтобы в дальнейшем тратить по 20000\$ в год из процентов, не трогая накопленной суммы? Банк дает 10% годовых; считайте, что  $\lg 1,1 = 0,0414$ .

3. а) В прямоугольнике  $ABCD$   $AB = 1$ ,  $BC = 3$ . Точки  $E$  и  $F$  делят сторону  $BC$  на три равные части. Докажите, что  $\angle CAD + \angle EAD + \angle FAD = 90^\circ$ .

б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты  $x$ ,

(Окончание см. на с. 35)

# Биссектрисы, вписанная и вневыписанные окружности треугольника

Как известно, биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – в центре вписанной окружности. Но мало кто знает, что радиус  $r$  вписанной окружности связан с высотами треугольника соотношением

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Биссектриса угла  $A$  треугольника делит противоположную сторону на отрезки  $\frac{ab}{b+c}$  и  $\frac{ac}{b+c}$ , которые относятся как прилежащие к ним стороны треугольника  $b$  и  $c$ . Сама же биссектриса делится точкой  $O$  пересечения биссектрис в отношении  $(b+c) : a$ .

Длина биссектрисы, проведенной из вершины  $A$ , равна

$$\frac{\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}}{b+c},$$

а расстояние от точки  $A$  до центра вписанной окружности равно

$$\sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}},$$

где  $p$  – полупериметр треугольника.

Нетрудно с помощью циркуля и линейки постро-

ить треугольник по его сторонам. Чуть труднее сделать это по медианам или по высотам. А построить треугольник по биссектрисам (в общем случае) невозможно.

Если провести все три биссектрисы внешних углов треугольника, то образуются три точки их пересечения, каждая из которых одинаково отстоит от прямых, на которых лежат стороны данного треугольника. Поэтому можно провести окружность с центром в такой точке, касающуюся всех сторон треугольника или их продолжений. Такие окружности называются вневыписанными.

Через центр вневыписанной окружности проходит и биссектриса одного из внутренних углов треугольника.

Сумма величин, обратных радиусам  $\rho_a$ ,  $\rho_b$  и  $\rho_c$  вневыписанных окружностей (рис.1), равна обратной величине радиуса вписанной в этот треугольник окружности:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}.$$

Приведем два изящных выражения для площади треугольника через радиусы вписанной и вневыписанных окружностей:

$$S = \sqrt{r\rho_a\rho_b\rho_c}, \quad S = \frac{a\rho_b\rho_c}{\rho_b + \rho_c}.$$

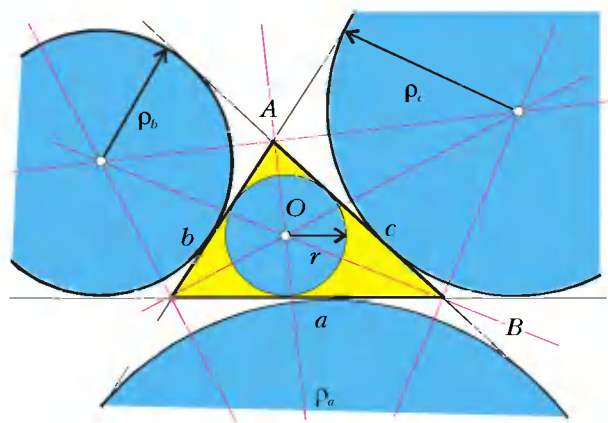


Рис. 1

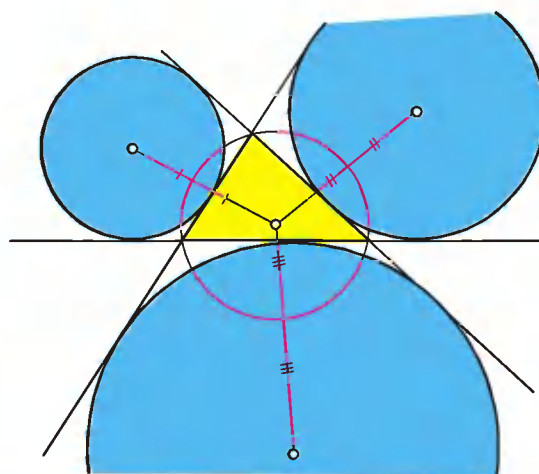


Рис. 2

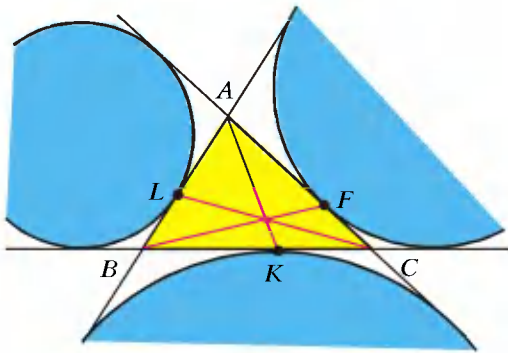


Рис. 3

Любопытно, что отрезки, соединяющие центр вписанной в треугольник окружности с центрами внеписанных окружностей, делятся пополам окружностью, описанной вокруг этого треугольника (рис.2).

Если провести окружность через основания высот данного треугольника, то она будет проходить через середины сторон этого треугольника и через середины отрезков высот треугольника от точки их

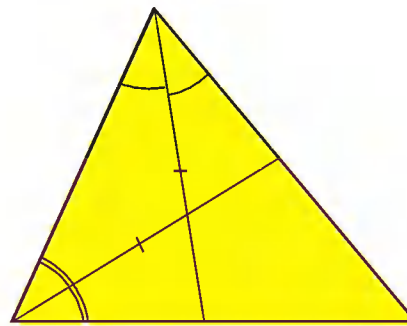


Рис. 4

пересечения до вершин. Такая окружность называется окружностью девяти точек. Окружность девяти точек касается вписанной и внеписанных окружностей этого треугольника.

Прямые в треугольнике, соединяющие его вершины с точками касания внеписанных окружностей (рис.3), пересекаются в одной точке, которая называется точкой Нагеля в честь открывшего ее немецкого математика Августа Нагеля (1821–1903).

Легко доказать, что у равнобедренного треугольника равны медианы, высоты и биссектрисы, выходящие из концов основания. Немного труднее доказать, что если две высоты или две медианы треугольника равны, то треугольник – равнобедренный (рис.4). Верно такое утверждение и для биссектрис, но его доказательство довольно сложно. Само это утверждение носит название «теорема Штрейнера – Лемуса».

На рисунке 5 построены все внеписанные окружности треугольника ABC. 16 точек касания вписанной и трех внеписанных окружностей треугольника с его сторонами, продолжениями сторон и окружностью девяти точек, не совпадающие с вписанной и внеписанными окружностями этого треугольника, лежат на четырех окружностях  $S_I, S_a, S_b, S_c$ . На окружности  $S_I$  лежат точки касания (1), (2), (3), (4); на окружности  $S_a$  – (5), (6), (7), (8); на окружности  $S_b$  – (9), (10), (11), (12) и, наконец, на окружности  $S_c$  – (13), (14), (15), (16). Окружности  $S_I, S_a, S_b, S_c$  называются окружностями четырех точек треугольника ABC.

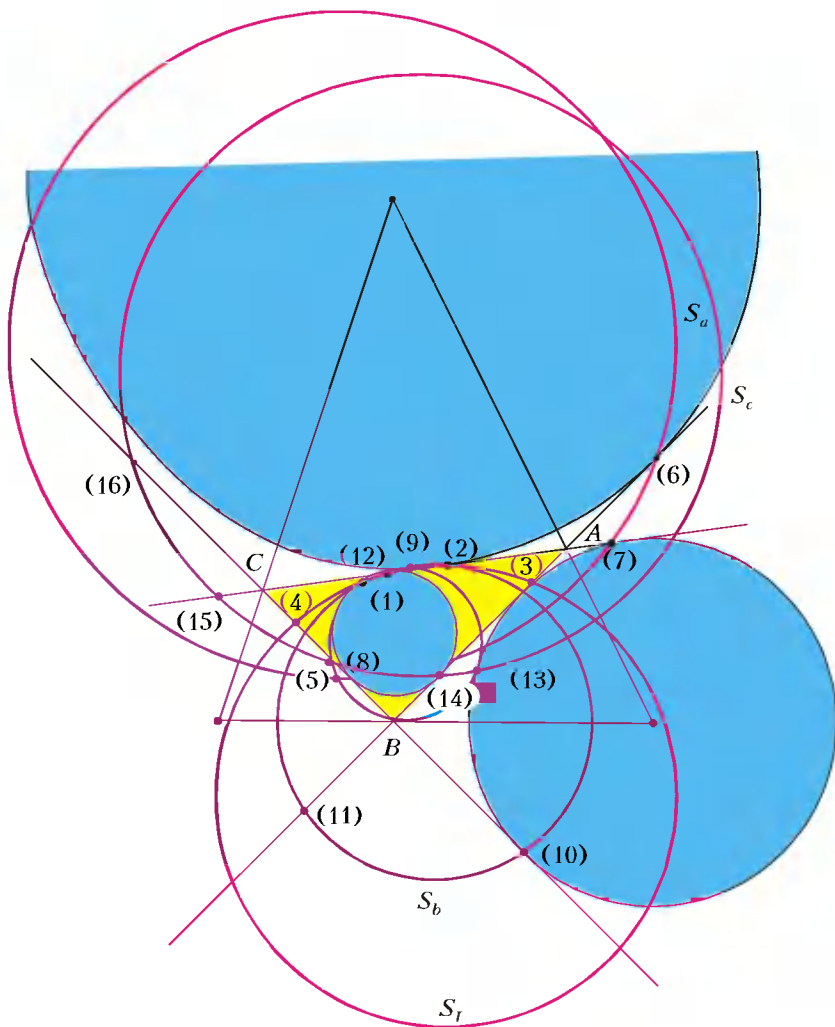


Рис. 5



# Сверхзвук на кончике бича

Г.МЕЛЕДИН

*Чуть помедленнее, кони, чуть помедленнее!  
Не указчики вам кнут и плеть...*

В.С.Высоцкий

В НАШИ СТРЕМИТЕЛЬНО БЕГУЩИЕ дни ассоциации, связанные со словами «бич», «кнут», «плеть», не из приятных. Хотя можно вообразить и идиллическую картину: сонный, расплавленный жарой воздух, нависший над зеленью луга, вдруг разрывает резкий щелчок кнута, и стадо лениво поднимается, подчиняясь пастуху. Но нас будет интересовать лишь то, каким образом сравнительно небольшими усилиями можно добиться очень высоких скоростей, пусть на небольшом участке кнута, приводящих к характерному звуку.

Итак, о кнутах, видимо, слышали все, но лишь немногие держали его в руках, пробовали в действии и представляют реально, что при этом происходит.

Обычно кнут представляет собой короткую палку-кнотовище, к концу которой прикреплен сплетенный из кожи или жгута длинный (несколько метров), прочный, с уменьшающимся к свободному концу сечением собственно кнут. Взмахом сообщают кнуту скорость, а потом резким движением кнотовища вызывают движение прикрепленной к нему части кнута в противоположную сторону. Через некоторое время раздается сильный щелчок (если кнут непрочный, то в этот момент часть его может оторваться). Оказывается, щелчок возникает, когда величина скорости у конца кнута переходит через значение скорости звука (как при переходе звукового барьера сверхзвуковым самолетом). Это получается вследствие того, что начальная кинетическая энергия концентрируется на все уменьшающемся движущемся отрезке кнута — кнотовище и остальная часть кнута, прикрепленная к нему, при этом неподвижна. Быстро растет плотность кинетической энергии, и, соответственно, нарастает скорость.

Все это можно рассчитать, что мы и сделаем, разобрав предварительно две

задачи, в чем-то перекликающиеся с задачей о кнутах.

**Задача о «сифоне-цепочке».** Через гвоздь перекинули тонкую длинную цепочку с малыми неупругими звеньями так, что часть цепочки лежит на краю стола высотой  $h$ , а часть — на полу (рис.1). С какой установившейся ско-

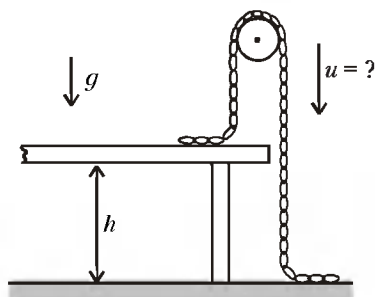


Рис. 1

ростью будет двигаться цепочка после того, как ее отпустят?

Введем линейную плотность цепочки  $\rho = M/L$ , где  $M$  — ее масса, а  $L$  — длина. Пусть установилась скорость  $u$ . Тогда за малое время  $\Delta t$  в движение вовлекается масса  $\Delta m = \rho u \Delta t$ , скорость которой изменяется от 0 до  $u$ , а импульс — от 0 до  $\Delta p = \Delta m u = \rho u^2 \Delta t$ . Этот импульс сообщает массе  $\Delta m$  сила тяжести  $\rho h g$ , действующая на неравновешенную часть цепочки. Исходя из второго закона Ньютона,

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mu)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} u + m \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Так как рассматривается движение с установившейся скоростью, имеем

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} u = \frac{\rho u^2 \Delta t}{\Delta t} = \rho u^2 = \rho g h.$$

Отсюда получаем

$$u = \sqrt{gh}.$$

Заметим, что закон сохранения энергии  $\Delta m g h = \Delta m u^2 / 2$  дает неправильный результат, так как часть приобретаемой при спуске энергии (ровно половина) теряется при неупругом ударе цепочки о пол.

Отметим также, что, если убрать гвоздь, т.е. рассматривать задачу о соскальзывании цепочки с края стола на пол, для нахождения установившейся скорости ни в решении, ни в ответе ничего не изменится.

**Задача о нити в трубке.** Внутри U-образной трубки массой  $M$ , находящейся на гладком столе, движется нерастяжимая нить массой  $m$  (рис.2; вид сверху). В начальный момент в каждом

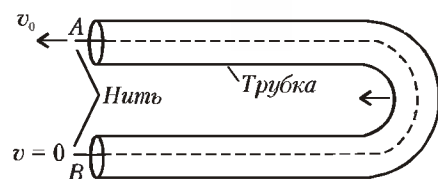


Рис. 2

колоне трубки находилось по половине нити, а сама трубка двигалась. При этом скорость конца  $A$  нити была равна  $v_0$ , а скорость конца  $B$  — нулю. С какой скоростью будет двигаться трубка, когда нить вылетит из нее? Движение трубки допускается только вдоль ее прямолинейных участков, радиус трубки считать очень малым. Трением пренебречь.

Так как нить нерастяжима, заданное в начальный момент соотношение скоростей для концов нити возможно лишь при условии, что скорость  $u_0$  трубки относительно стола в этот момент равна  $v_0/2$  и направлена в ту же сторону, что и скорость конца нити  $A$ .

Перейдем в систему отсчета, где начальная скорость трубки равна нулю. В этой системе половина нити с концом  $A$  имеет скорость  $v_0/2$ , импульс  $(m/2)(v_0/2)$  и кинетическую энергию  $(m/2)(v_0/2)^2/2$ . А половина нити с концом  $B$  имеет скорость  $-v_0/2$ , импульс  $-(m/2)(v_0/2)$  и кинетическую энергию  $(m/2)(v_0/2)^2/2$ . Таким образом, вначале в этой системе отсчета полный импульс нити, а также импульс и кинетическая энергия трубки равны нулю. Энергия нити при этом равна  $m v_0^2 / 8$ . Пусть после вылета нити из трубки скорость нити равна  $v$ , а скорость трубки равна  $u$ . Тогда законы сохранения импульса и энергии можно записать

следующим образом:

$$0 = Mu + mv, \quad \frac{mv_0^2}{8} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Отсюда

$$u = -\frac{m}{\sqrt{M(m+M)}} \frac{v_0}{2}.$$

Знак «минус» выбран в соответствии с законом сохранения импульса, из которого следует, что скорости  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  направлены в противоположные стороны.

Возвращаясь в систему отсчета, связанную со столом, находим искомую скорость трубки:

$$u_1 = u + \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2} \left( 1 - \frac{m}{\sqrt{M(m+M)}} \right).$$

**Задача о кнуте.** Пусть вначале, двигая кнотовище со скоростью  $v_0$  влево, такую же скорость сообщают всему кнуту по всей длине  $L$ , а потом, резко сдвинув кнотовище вправо, удерживают его неподвижно, прикладывая некоторую силу. Тогда длина  $l$  движущейся части кнута будет уменьшаться, а скорость  $v$  — увеличиваться. При каком значении  $l$  скорость  $v$  достигнет величины скорости звука  $v_{зв}$  (рис.3)?



Рис. 3

Сначала для упрощения рассмотрим однородный кнут с массой  $M$  и длиной  $L$ , т.е. с линейной плотностью  $\rho = M/L$ . Из закона сохранения энергии

имеем

$$\frac{\rho L v_0^2}{2} = \frac{\rho l v^2}{2},$$

или

$$v = v_0 \sqrt{\frac{l}{L}}.$$

(Между прочим, отсюда видно, что при уменьшении  $l$  до нуля скорость  $v$  неограниченно растет.) Таким образом, получаем связь

$$v = -\frac{dl}{dt} = \frac{v_0 L^{1/2}}{l^{1/2}}.$$

Знак «минус» обусловлен уменьшением длины с течением времени. Запишем связь иначе:

$$l^{1/2} dl = -v_0 L^{1/2} dt$$

и проинтегрируем левую и правую части по интервалу времени  $t$ , за который длина движущейся части кнута меняется от  $L$  до  $l$ :

$$\int_L^l l^{1/2} dl = \frac{l^{3/2}}{3/2} \Big|_{l=L}^{l=l} = \frac{2}{3} (l^{3/2} - L^{3/2}) = -v_0 L^{1/2} t.$$

Отсюда получаем

$$l = L \left( 1 - \frac{3 v_0 t}{2 L} \right)^{2/3},$$

или, с учетом соотношения  $v = v_0 L^{1/2} / l^{1/2}$ , —

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{3 v_0 t}{2 L} \right)^{-1/3}.$$

Формально при  $t = 2L/(3v_0)$  скорость  $v$  стремится к бесконечности, а длина  $l$

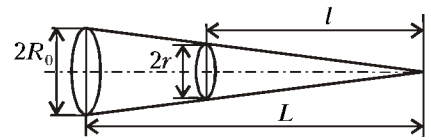


Рис. 4

— к нулю. Однако это получается при бесконечно тонком однородном кнуте, что нереалистично.

Рассмотрим теперь более реальный вариант: кнут с линейно уменьшающимся, от кнотовища к концу, радиусом кругового сечения. Из подобия треугольников на рисунке 4 следует  $r = R_0 l/L$ . Повторяя предыдущую схему рассуждений, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_0 v_0^2}{2} = \rho \frac{\pi R_0^2 L}{3} \frac{v_0^2}{2} = \rho \frac{\pi r^2 l}{3} \frac{v^2}{2},$$

откуда, с учетом связи  $r = R_0 l/L$ , получаем

$$v = v_0 \left( \frac{l}{L} \right)^{3/2}.$$

Тогда

$$l = L \left( 1 - \frac{5 v_0 t}{2 L} \right)^{2/5}, \quad v = \frac{v_0}{\left( 1 - \frac{5 v_0 t}{2 L} \right)^{3/5}}.$$

Оценим, при какой длине  $l$  скорость  $v$  достигает значения скорости звука  $v_{зв} \approx 330$  м/с. Положив  $L = 5$  м,  $v_0 = 1$  м/с, получим

$$l = \frac{L}{(v_{зв}/v_0)^{2/3}} \approx \frac{5 \text{ м}}{(330)^{2/3}} \approx \frac{5 \text{ м}}{50} = 0,1 \text{ м}.$$

Таким образом, при длине порядка 10 см от конца кнута происходит щелчок — переход звукового барьера.

## Несколько задач для 11-классников

(Начало см. на с. 29)

у которых удовлетворяют уравнению  $\arctg x + \arctg y = 2 \arctg \frac{x+y}{2}$ .

в) Вычислите бесконечную сумму  $\arctg 1 + \arctg \frac{1}{3} + \dots$

$$\dots + \arctg \frac{1}{n^2 + n + 1} + \dots$$

4. а) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра

которой имеют длину 1, а два оставшихся равны друг другу.

б) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину 1.

в) Сколько различных (т.е. различных по внешнему виду) каркасов треугольных пирамид можно составить из зеленых стержней длиной по 33 см каждый и красных стержней длиной по 20 см?

### Разные задачи

1. а) Найдите все целые решения уравнения  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1998}$ .

б) Найдите все натуральные решения уравнения  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{1998}$ .

2. а) Найдите все треугольники, длины сторон и величины углов которых образуют арифметические прогрессии.

б) Верно ли, что для всякой арифметической прогрессии из четырех положительных чисел существует выпуклый четырехугольник, длинами сторон которого являются эти числа?

в) Найдите все четырехугольники, длины сторон и углы которых (взятые в циклических порядках) образуют арифметические прогрессии.





**Упражнение 2.** При помощи калькулятора убедитесь, что следующая таблица заполнена правильно:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\lceil (1+\sqrt{5})n/2 \rceil$	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29
$\lceil (3+\sqrt{5})n/2 \rceil$	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47

натуральных чисел  $m$  и  $n$  должны быть выполнены неравенства

$$\alpha m < k < k + 1 < \alpha(m + 1),$$

$$\beta n < k < k + 1 < \beta(n + 1),$$

которые мы преобразуем к виду

$$\frac{m}{k} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m+1}{k+1}, \quad \frac{n}{k} < \frac{1}{\beta} < \frac{n+1}{k+1}.$$

**Доказательство**

Как же доказать замечательные формулы (1)? И неужели я первый догадался рассмотреть выражения  $\lceil \alpha n \rceil$  и  $\lceil \beta n \rceil$ ? Нет, в 1877 году в «Теории звука» лорд Рэлей писал: «Если  $x$  есть некоторое положительное иррациональное число, меньшее единицы, то можно взять два ряда величин  $n/x$  и  $n/(1-x)$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; каждое число, принадлежащее к тому или иному ряду, и только оно одно, будет заключено между двумя последовательными натуральными числами». Другими словами, последовательности  $a_n = \lceil n/x \rceil$  и  $b_n = \lceil n/(1-x) \rceil$  заполняют без пропусков и перекрытий весь натуральный ряд, если  $0 < x < 1$  и  $x \notin \mathbb{Q}$ .

Интересующие нас явные формулы получаются из формул Рэрея при  $x = 2/(1+\sqrt{5})$ , поскольку при этом величина  $1-x$  равна как раз  $2/(3+\sqrt{5})$  (проверьте!).

В общем случае, обозначив  $\alpha = 1/x$  и  $\beta = 1/(1-x)$ , можно переформулировать утверждение Рэрея следующим образом<sup>1</sup>:

**Теорема 1.** Если  $\alpha$  и  $\beta$  – положительные иррациональные числа, связанные соотношением  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ , то среди чисел вида  $\lceil \alpha n \rceil$  и  $\lceil \beta n \rceil$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , каждое натуральное число встречается ровно один раз.

**Доказательство.** Поскольку  $\alpha > 1$ , в последовательности  $\lceil \alpha \rceil, \lceil 2\alpha \rceil, \lceil 3\alpha \rceil, \dots$  никакое число не повторяется. Аналогично, вследствие неравенства  $\beta > 1$ , строго возрастает и последовательность  $\lceil \beta \rceil, \lceil 2\beta \rceil, \lceil 3\beta \rceil, \dots$

Дальше доказательство ведем методом «от противного». Предположим сначала, что некоторое натуральное число  $k$  вошло в обе последовательности, т. е.  $k = \lceil \alpha m \rceil = \lceil \beta n \rceil$ , где  $m, n$  – натуральные числа. Тогда должны быть выполнены неравенства

$$k < \alpha m < k + 1, \quad k < \beta n < k + 1,$$

т.е.

$$\frac{m}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m}{k}, \quad \frac{n}{k+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n}{k}.$$

Сложим эти неравенства, не забыв использовать условие  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Получим

$$\frac{m+n}{k+1} < 1 < \frac{m+n}{k},$$

откуда

$$k < m + n < k + 1.$$

Но такого для натуральных чисел не бывает! Значит, число  $k$  не могло войти в обе рассматриваемые последовательности.

Теперь предположим, что натуральное число  $k$  не вошло ни в одну из последовательностей. Тогда для некоторых

Складывая, получаем

$$\frac{m+n}{k} < 1 < \frac{m+n+2}{k+1},$$

откуда  $m+n < k$  и  $k+1 < m+n+2$ , что невозможно для натуральных чисел. Получили желанное противоречие. Теорема доказана.

Хотя мне нравится это доказательство, есть и более короткий способ.<sup>2</sup> Левее любого натурального числа  $N$  лежат  $\lceil N/\alpha \rceil$  членов первой последовательности и  $\lceil N/\beta \rceil$  членов второй. Поскольку  $\alpha$  иррационально, числа  $N/\alpha$  и  $N/\beta$  имеют ненулевые дробные части. Далее, сумма

$$\frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} = N$$

является целым числом, так что дробные части слагаемых дополняют друг друга, т.е. в сумме дают в точности 1. Значит, сумма целых частей  $\lceil N/\alpha \rceil + \lceil N/\beta \rceil$  равна  $N-1$ , т.е. левее числа  $N$  лежит в точности  $N-1$  членов этих последовательностей. Как легко понять, просматривая натуральный ряд слева направо (любитель строгости сказал бы: применяя индукцию), это как раз означает, что рассматриваемые последовательности однократно покрывают натуральный ряд.

**Упражнения**

**3.** Докажите, что последовательности, заданные формулами  $a_n = \lceil n\sqrt{2} \rceil$  и  $b_n = a_n + 2n$ , заполняют весь натуральный ряд без пропусков и перекрытий.

**4.** Найдите явные формулы для возрастающих последовательностей  $a_n$  и  $b_n$ , заполняющих натуральный ряд без пропусков и перекрытий и удовлетворяющих соотношению  $b_n = a_n + 3n$  при всех  $n = 1, 2, 3, \dots$

**5.** Докажите утверждение, обратное теореме 1: если  $\alpha, \beta$  – положительные числа и если последовательности  $a_n = \lceil \alpha n \rceil$  и  $b_n = \lceil \beta n \rceil$  покрывают натуральный ряд без пропусков и перекрытий, то  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ , причем числа  $\alpha$  и  $\beta$  иррациональны.

**6.** Выведите из трех предыдущих упражнений, что числа  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{13}$  иррациональны.<sup>3</sup>

**7.** Пусть  $a$  – положительное иррациональное число,  $b = 1/a$ . Докажите, что между любыми двумя последовательными натуральными числами содержится одно и только одно из чисел  $1+a, 2(1+a), 3(1+a), \dots$  и  $(1+b), 2(1+b), 3(1+b), \dots$

*Замечание.* Последнее упражнение имеет номер 38 в книге «Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly» (М., Мир, 1977). Следующее упражнение – задача 294 из той же книги.

**8.** Для натурального числа  $a > 4$  рассмотрим две последовательности  $f(n)$  и  $g(n)$  натуральных чисел, заданные условиями  $f(1) =$

<sup>2</sup> Мне кажется, его чуть сложнее понять или придумать. Впрочем, не будем спорить о вкусах.

<sup>3</sup> Только не подумайте, пожалуйста, что я хочу заменить этим способом привычное доказательство из школьного учебника. Нет, это всего лишь шутка. Шутка!

<sup>1</sup> С этого момента, заметьте, числа  $\alpha$  и  $\beta$  не обязательно суть  $(1+\sqrt{5})/2$  и  $(3+\sqrt{5})/2$ .

$= 1$ ,  $g(n) = na - 1 - f(n)$  и, наконец,  $f(n+1)$  – наименьшее натуральное число, отличное от каждого из  $2n$  чисел  $f(1), f(2), \dots, f(n), g(1), g(2), \dots, g(n)$ . Докажите, что существуют такие числа  $\alpha$  и  $\beta$ , что  $f(n) = [\alpha n]$ ,  $g(n) = [\beta n]$ .

9. а). Пусть  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ . Докажите для любого натурального числа  $n$  равенство  $[n\alpha^2] = [\alpha[\alpha n]] + 1$ .

б) Пусть последовательность всех натуральных чисел разбита на две непересекающиеся подпоследовательности  $f(1) < f(2) < f(3) < \dots$  и  $g(1) < g(2) < g(3) < \dots$ , причем  $g(n) = f(f(n)) + 1$  для любого  $n$ . Найдите  $f(240)$ . (Этот пункт в 1978 году предлагался на Международной математической олимпиаде и вошел в «Задачник «Кванта» под номером М538.)

10. Пусть  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$  и  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Докажите, что каждое

натуральное число входит в одну и только одну из последовательностей  $a_n = [\alpha n]$  и  $b_n = [\beta n] - 1$ , где через  $[x]$  обозначено наименьшее целое число, которое больше или равно числу  $x$  (иначе говоря,  $[x] = -[-x]$ ).

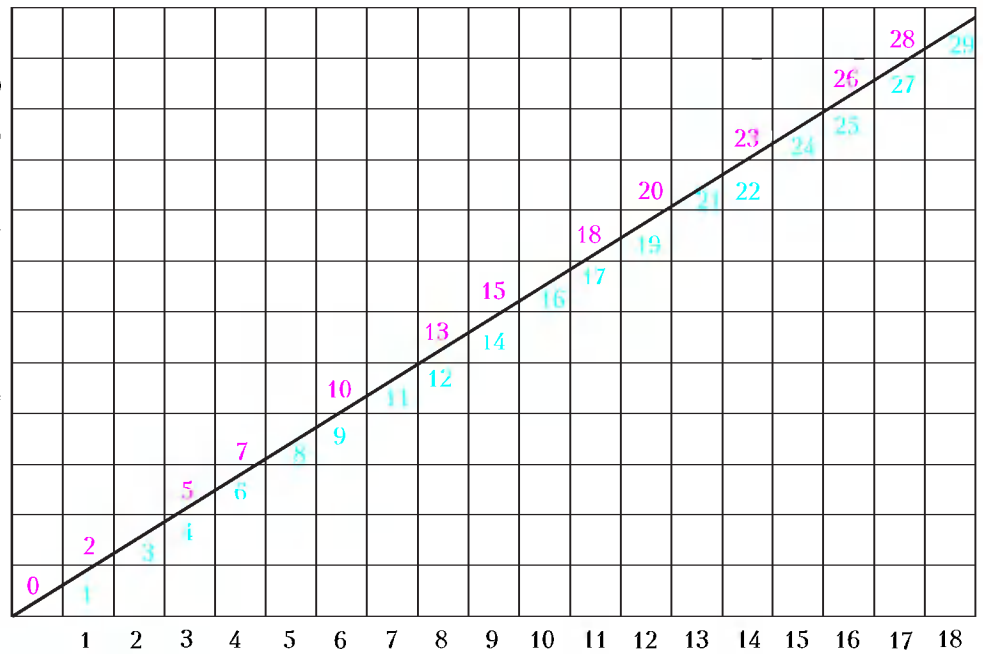
### Геометрическая интерпретация

*Что для нас – головоломка,  
духом тайны разум будит –  
очевидно, для потомка  
просто школьным курсом будет.*

И.Губерман

Теорема 1 настолько красива, что возникает желание глубже проникнуть в суть дела. Пусть, как и ранее,  $\alpha$  и  $\beta$  – положительные иррациональные числа, причем  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Тогда  $\beta + \alpha = \alpha\beta$ , откуда  $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 1$ .

Нарисуем на клетчатой бумаге (см. рисунок) как на координатной плоскости прямую  $l$ , заданную уравнением  $y = (\alpha - 1)x$ , которое можно записать также в виде  $x = (\beta - 1)y$ . Занумеруем подряд все клетки, которые пересекает  $l$ , начиная с нулевой клетки, которой принадлежит начало координат (на рисунке взято  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ ). Поскольку число  $\alpha$  иррационально, прямая  $l$  не проходит через узлы сетки (кроме, разумеется, начала координат).



Значит,  $l$  входит в очередную клетку либо слева, пересекая вертикальную линию сетки, либо снизу, пересекая горизонтальную линию.

Если  $l$  вошла в клетку слева и пересекла при этом вертикаль  $x = n$ , то номер клетки, в которую при этом вошла прямая, равен  $n + [(\alpha - 1)n] = [\alpha n]$ . (Это не очевидно? Согласен. Но если занумеровать не только клетки, которые пересекает  $l$ , а вообще присвоить номер  $n + m$  каждой клетке, заданной неравенствами  $n \leq x < n + 1$ ,  $m \leq y < m + 1$ , то ситуация вполне прояснится.) Если же прямая  $l$  снизу пересекла горизонталь  $y = m$ , то номер соответствующей клетки равен  $[(\beta - 1)m] + m = [\beta m]$ .

Вот и все. Согласитесь, это геометрическое доказательство теоремы 1 достойно восхищения! И хотя можно было бы еще очень многое рассказать (последовательности  $a_n = [n(1 + \sqrt{5})/2]$ ,  $b_n = [n(3 + \sqrt{5})/2]$  связаны и с игрой цзяньшицзы, и с числами Фибоначчи, и со многими другими интересными задачами), я ограничусь советом прочитать статью И.М.Яглома «Две игры со спичками» («Квант» №1 за 1992 год) и статью А.Ю.Матулиса, А.Ю.Савушкина «Ферзя – в угол, «цзяньшицзы» и числа Фибоначчи» («Квант» №7 за 1984 год).

(Окончание следует)

## РЕЦЕНЗИИ

### Конкретная математика

**Примеры учат не меньше, чем правила. «Конкретная» математика... остается при всех поворотах моды и составляет необходимую часть ремесла всякого математика.**

В.И.Арнольд

Издательство «Мир» перевело на русский язык книгу «Конкретная математика. Основание информатики», в ос-

нову которой положен курс лекций, уже тридцать лет подряд читаемый в Станфордском университете (США). У книги три автора. Один из них – крупный специалист по комбинаторике, профессор Рутгерского университета, сотрудник «Bell Laboratories» Рональд Грэхем. Другой – профессор информатики Станфордского и многих других университетов (в том числе Санкт-Петербургского), автор зачиты-

ваемого до дыр учебника «Искусство программирования для ЭВМ», создатель в высшей степени удобной и ставшей фактическим стандартом научных публикаций издательской системы T<sub>E</sub>X Дональд Кнут. Третий – Орен Паташник, сотрудник Исследовательского центра средств связи в Ла-Лохья.

Для математиков нашей страны идея «Конкретной математики» не является неожиданностью: замыслы основателей

журнала «Квант» и организаторов олимпиад, да и весь опыт наших математических школ и кружков созвучны идеям Грэхема, Кнута и Паташника. Если бы языковой барьер не затруднял американцам знакомство с русскоязычными источниками, то «Конкретная математика» включала бы, я уверен, многие из наших олимпиадных задач.<sup>1</sup> Правда, у нас олимпиады проводились в основном для школьников, а не для студентов. Поэтому очень интересно познакомиться с американским опытом, к тому же увлекательно изложенным.

Авторы сообщают, что «с удовольствием объединили свои усилия для работы над этой книгой, поскольку ее предмет начал зарождаться и обретать свою собственную жизнь на наших глазах; кажется, что книга написана сама собой. Более того, отчасти разнородные подходы, которые выбирал каждый из нас, оказались после многолетней совместной работы настолько подогнанными друг к другу, что мы не могли удержаться от ощущения: эта книга – своего рода манифест единодушно избранного нами пути занятий математикой».

Основные темы книги – индукция и исчисление сумм, рекуррентность, целочисленные функции и последовательности, элементы арифметики, биномиальные коэффициенты, производящие функции, вероятности и асимптотики. Обучение общим темам ведется на многочисленных примерах: в книге более 500 упражнений, причем все они снабжены указаниями, а большинство – подробными решениями.<sup>2</sup> Неформальный стиль изложения, многочисленные пометки и комментарии на полях, в том числе шутки студентов, позволяют осваивать весьма серьезные темы весело и непринужденно.

Начинается книга с индукции – важнейшего метода математического исследования. Подробнейшим образом обсуждена задача о ханойской башне<sup>3</sup>,

<sup>1</sup> Впрочем, авторы с уважением относятся к нашей стране. Д.Кнут даже владеет русским языком, а когда он разработал вал Т<sub>FX</sub>, то сделал так, чтобы эту издательскую систему можно было легко адаптировать к любому неероглифическому языку, в том числе к русскому.

<sup>2</sup> Удивительная добросовестность авторов проявилась и в огромном списке литературы (на каждый из 401 источников есть ссылка в тексте!), и в исторических изысканиях: для каждого упражнения они пытались найти первоисточник!

<sup>3</sup> Между прочим, о ханойской башне можно прочитать в одной из первых и лучших наших «олимпиадных» книг: Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов и И.М.Яглом «Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра» (М., 1965). Там она хотя и не первая по номеру, но третья!

которую придумал француз Эдуард Люка в 1883 году. (Башня представляет собой несколько колец, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и никогда не помещая больший диск на меньший.) Затем рассмотрена придуманная швейцарцем Якобом Штейнером в 1826 году задача о разрезании пиццы (т.е. о том, на какое наибольшее число областей могут разделить плоскость  $n$  прямых). После этого – задача Иосифа Флавия, от решения которой две тысячи лет назад в буквальном смысле зависела жизнь человека. («Есть легенда, что Иосиф выжил и стал известным благодаря математической одаренности. В ходе Иудейской войны он в составе отряда из 41 воина был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего... Однако Иосиф вместе со своим единомышленником... вычислил спасительные места в порочном круге, на которые поставил себя и своего товарища.»)

Далее идет «Исчисление сумм». Семью способами найдена сумма квадратов  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .<sup>4</sup> После этого по индукции доказаны равенства

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots$$

$$\dots + (n-1)n + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Вряд ли многие задумывались об аналогии между ними. И даже если вы задумывались и знаете, что если в последнем равенстве каждое слагаемое  $1/(k(k+1))$  представить в виде разности дробей  $1/k$  и  $1/(k+1)$ , то получится как раз

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

<sup>4</sup> Не верите, что такое возможно? Читайте книгу! Там указан еще и нулевой способ – посмотреть ответ в справочнике, причем объяснено, в каких именно справочниках и как следует искать интересующие сведения.

$$\dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

а тождество

$$k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) =$$

$$= 3k(k+1)$$

позволяет аналогично найти сумму

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}(1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2 +$$

$$+ 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots$$

$$\dots + (n-1)n(n+1) - (n-2)(n-1)n +$$

$$+ n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)) =$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

все равно вопрос о величине

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+1)}$$

или

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3)$$

не кажется простым. Между тем все это есть часть единого целого – теории конечных разностей.

Дальнейшей пересказ книги не имеет смысла: каждому интересующемуся (тем более – студенту или преподавателю) я советую ее прочитать. Авторы гарантируют: «...все, что Вам потребуется, – это ясная голова, большой лист бумаги и сносный почерк для вычисления ужасных сумм, решения запутанных рекуррентных соотношений и выявления коварных закономерностей в данных. Вы овладеете алгебраической техникой в такой степени, что зачастую будет проще получить точные результаты, нежели удовлетвориться приближенными ответами, справедливыми лишь в пределе».

Б. Стиров



# Поляризация света. Простейшие опыты

**А.МИТРОФАНОВ**

СЕЙЧАС ИЗВЕСТНО, ЧТО СВЕТ – ЭТО электромагнитные волны, причем волны поперечные: бегущая в пространстве со скоростью света  $c$  электромагнитная волна с частотой  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$  ( $\lambda = c/\nu$ ) описывается взаимно перпендикулярными векторами напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$ . Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны направлению распространения (скорости  $\vec{c}$ ) и изменяются во времени синхронно.

Здесь нас будет интересовать вопрос, как экспериментально установить, что свет это волны поперечные, а не продольные, т.е. проверить справедливость гипотезы, высказанной, видимо, впервые в 1757 году английским физиком Робертом Гуком (она была подтверждена в дальнейшем в работах Т.Юнга, О.Френеля, Дж.К.Максвелла и других ученых).

Рассмотрим сначала классический опыт, который при желании можно повторить самим. Предположим, что у нас есть стеклянная пластинка с гладкой плоской поверхностью  $PP'$ , т.е. зеркало (рис.1). Пусть узкий луч  $AB$  от какого-либо яркого источника, например от Солнца или фонаря, падает на зеркало и отражается от него ( $\alpha$  – угол падения луча на зеркало, отсчитываемый от нормали к зеркалу и равный углу отражения). Далее, пусть отраженный луч  $BC$  падает на второе такое же стекло  $NN'$ , которое можно вра-

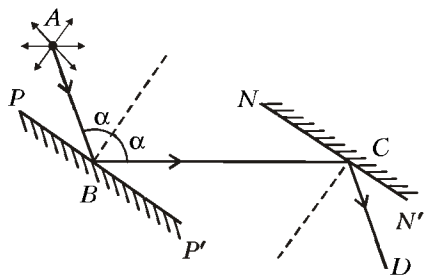


Рис.1. Схема опыта Малюса по отражению света от двух стеклянных поверхностей

щать вокруг оси  $BC$ . Оказывается, что при одном и том же угле падения луча на второе стекло интенсивность зеркально отраженного стеклом света зависит от положения плоскости падения луча (плоскости, содержащей луч и нормаль к поверхности стеклянной пластинки, проведенную из точки падения луча на поверхность): если плоскость  $PP'$  параллельна  $NN'$ , интенсивность отраженного света наибольшая, при развороте  $NN'$  на прямой угол интенсивность минимальная, а когда угол падения равен примерно  $56^\circ$  (для стекла), свет практически не отражается от второго стекла. Геометрия этого опыта такова, что поперечную анизотропию отражения можно объяснить, только предположив поперечность колебаний в световой волне. Для продольных волн разворот плоскости падения вокруг оси, совпадающей с направлением падающего луча, никак бы не сказался на интенсивности отраженного света.

Почему же изменяется интенсивность света, отраженного от второй пластинки? Естественный свет (у нас это солнечный луч или луч от фонаря) симметричен по отношению к направлению распространения, т.е. все направления для вектора  $\vec{E}$  в волне равновероятны в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Говорят, что естественный свет не поляризован. Поперечная анизотропия световых волн, или по-другому *поляризация света*, появляется, например, при его отражении, как в рассматриваемом нами опыте. При угле падения около  $56^\circ$  отраженная часть света оказывается почти полностью поляризованной: электрический вектор  $\vec{E}$  в отраженной световой волне занимает определенное положение, а именно – он перпендикулярен плоскости падения светового луча на стеклянный образец. Плоскость, содержащую вектор  $\vec{E}$  и вектор направления распространения

волны, принято называть плоскостью поляризации, а такой свет – *линейно поляризованным* или *плоскополяризованным*.

Автором рассмотренного опыта был французский ученый Этьен Луи Малюс. Поляризацию света при отражении Малюс обнаружил впервые в 1808 году, когда наблюдал за отражением света от окна Люксембургского дворца в Париже с помощью двоякопреломляющего кристалла исландского известкового шпата ( $\text{CaCO}_3$ ). Этот кристалл послужил Малюсу анализатором поляризации. При повороте кристалла вокруг направления луча, отраженного под большим углом от окна, Малюс заметил, что интенсивность двух получающихся изображений периодически изменяется. Следует сказать, что именно с обнаружения двойного лучепреломления (Э.Бартолин, 1669г.) ведут свое начало исследования, приведшие к открытию поляризации света (Х.Гюйгенс, 1690 г.).

В 1812 году шотландский физик Дэвид Брюстер установил закон, связывающий угол полной поляризации при отражении  $\phi_B$  (угол Брюстера) и коэффициент преломления материала  $n$ :

$$\text{tg } \phi_B = n.$$

Согласно этому закону, отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу (рис.2). При этом достигается почти полная поляризация для отраженного света, а направление вектора  $\vec{E}$  в отраженной световой волне, как сейчас известно, перпендикулярно плоскости падения.

Закон Брюстера непосредственно следует из простых, правда более поздних, модельных представлений, описывающих прохождение света через плоскую границу вещества. По этим представлениям, отраженная от прозрачной изотропной среды с коэффициентом преломления  $n$  световая волна есть результат излучения вынужденных колебаний электронов атомов среды, которые становятся источниками

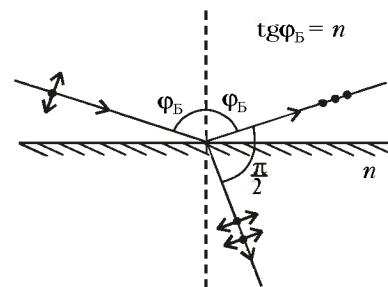


Рис.2. Отражение света под углом Брюстера

вторичных волн при падении света на образец. Направление колебаний электронов совпадает с направлением вектора  $\vec{E}$  в преломленной световой волне, т.е. оно перпендикулярно направлению распространения света в среде. Вынужденное колебательное движение электронов можно рассматривать как суперпозицию колебаний в плоскости падения и в перпендикулярном ей направлении – ведь исходная волна не поляризована. Так как ансамбль колеблющихся электронов, или электрических диполей, не излучает в направлении своего движения (подумайте, почему), то при падении света на плоский образец под углом Брюстера, когда  $\text{tg } \varphi_B = n$ , отраженный и преломленный лучи составляют прямой угол и отраженная волна возникает только из-за излучения электронов, колеблющихся перпендикулярно плоскости падения света. В результате вектор  $\vec{E}$  в отраженной волне тоже перпендикулярен плоскости падения. Если же на образец диэлектрика под углом  $\varphi_B$  падает изначально поляризованный свет и плоскость поляризации совпадает с плоскостью падения, то свет не отражается от образца.

Модельные представления и выводы теории очень полезны в физике. Но нельзя ли было выполнить прямой эксперимент, чтобы ответить на вопрос, как ориентирован вектор  $\vec{E}$  в поляризованной при отражении световой волне по отношению к плоскости падения света? Для ученых XIX века это было сделать непросто, так как длина световой волны  $\lambda$  очень мала. Споры и обсуждения продолжались больше 50 лет, пока не был поставлен прямой опыт (О.Винер, 1890 г.), в котором было доказано, что при отражении света от диэлектрика плоскость поляризации перпендикулярна плоскости падения.

Прежде чем перейти к самостоятельным экспериментам, сделаем еще одно замечание. Превратить естественный свет в линейно поляризованный или анализировать состояние поляризации пучка света можно по-разному, например с помощью двоякопреломляющего кристалла или отражателя, установленного под углом Брюстера, или в опытах по рассеянию излучения в среде. Но можно поступить проще: надо приобрести в магазине фототоваров один или лучше пару поляризационных фильтров марки ПФ – их называют еще поляроидами. Эти замечательные устройства были изобретены в конце 20-х годов в США и представляют собой тонкие растянутые и ориентиро-

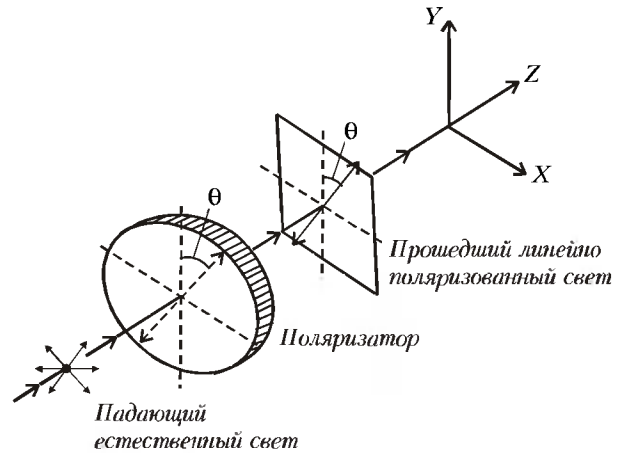


Рис. 3. Линейный поляризатор

ванные (на молекулярном уровне) пленки полимеров с добавками поглотителя, так что одна из ортогональных поляризаций полностью поглощается в пленке (дихроичный поляризатор). Первый поляроид сделал Эдвин Ленд, будучи студентом Гарвардского колледжа, автору изобретения было тогда всего 19 лет.

Для удобства пленка поляроида помещена в оправу, с возможным вращением ее вокруг оси, и закрыта с двух сторон стеклами. На оправе есть две диагональные точки-метки ориентации поляроида, которые помогут однозначно определить плоскость поляризации светового луча в ваших опытах. На рисунке 3 показано, как устанавливаются в пучке света поляроиды и как они действуют в качестве линейного поляризатора (или анализатора) поляризованного пучка.

Теперь – опыты. Предлагаем проделать четыре несложных опыта, которые помогут глубже познакомиться с поляризацией света.

### Опыт 1. Стопа Столетова из полимерных пленок

Если вы купили в магазине кусок сыра, упакованный в тонкую прозрачную полимерную пленку, например из поли-

пропилена, не торопитесь выбрасывать пленку: полипропилен – отличный материал для изготовления простого поляризационного прибора, который называют в наших учебниках стопой Столетова. (Обычно стопа Столетова состоит из набора – порядка 10 штук – параллельных тонких и однородных стеклянных пластинок, установленных с малым воздушным зазором между соседними пластинками.) Вырежьте из пленки полоску и сложите ее несколько раз пополам так, чтобы получился восьми- или шестнадцатислойный полимерный многослойник. Закрепите его на стеклянной пластинке или в оправке, чтобы он был плоским и обязательно без складок.

В ваших руках поляризатор, работающий на просвет и на отражение – чтобы убедиться в этом, установите стопу на пути светового пучка, развернув ее плоскость по отношению к пучку на угол Брюстера  $\varphi_B \approx \pi/3$  (для полипропилена  $n \approx 1,5$ ). С помощью пленочного поляроида проверьте, что свет, прошедший через стопу, сильно поляризован. А куда направлен вектор  $\vec{E}$  в такой световой волне? Сравните, соответствуют ли результаты ваших измерений рисунку 4, на котором поясняется принцип действия стопы-поляризатора

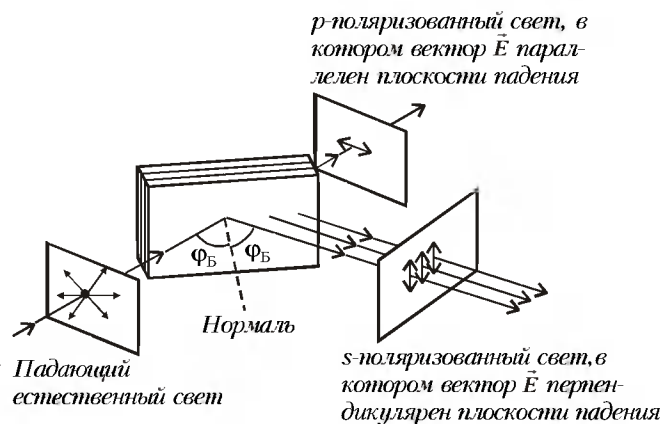


Рис. 4. Разделение естественного света на два пучка линейно поляризованного света с помощью пластинок из прозрачного диэлектрика

ра. (Попробуйте провести опыт с целлофановой или лавсановой пленкой – вы получите интересный результат!)

### Опыт 2. Поляризация света при прохождении через узкий зазор

Пожалуй, это самый простой опыт, позволяющий убедиться в поперечности световой волны. Поляризатором в опыте служит обычный микрометр – измерительный прибор, который есть в каждой механической мастерской. (При некотором навыке микрометр вполне может быть заменен на более грубое устройство – штангенциркуль.) Подвижной шпindel микрометра представляет собой винт с шагом резьбы 0,5 мм. Полный оборот измерительного барабана микрометра – 50 делений, что соответствует перемещению винта на 500 мкм при цене деления 10 мкм.

Опыт состоит в наблюдении яркого источника света через узкий зазор между контактными поверхностями (щечками) микрометра, который нужно установить равным 15–20 мкм. Чтобы было удобнее проводить наблюдения, желательно убрать лишний свет: перед источником света можно поставить широкий темный экран с небольшим отверстием для вывода пучка и выключить в комнате посторонние источники света.

Возьмите в одну руку микрометр, а в другую поляриоид и наблюдайте узенькую полоску света, прошедшего через зазор микрометра (рис. 5). Вы обнаружите, что этот свет поляризован, причем плоскость поляризации параллельна щели, как бы вы не крутили микрометр вокруг направления распространения света.

Как объяснить эффект возникновения поляризации у прошедшего через зазор (глубокую щель) света? Считается, что в отличие от диэлектрика ме-

талл плохо поляризует падающий свет: луч с любой поляризацией хорошо отражается от металлической гладкой поверхности. Заметим однако, что и для металлов и для диэлектриков волны с  $s$ -поляризацией всегда лучше отражаются от поверхности, чем волны с  $p$ -поляризацией (см. рис. 4), в том числе и при скользящих углах падения. Таким образом, появление поляризации в прошедшем через зазор пучке света с ориентацией вектора  $\vec{E}$  вдоль зазора можно объяснить разными потерями при многократных отражениях волн с  $s$  и  $p$ -поляризацией. (Подумайте, какую роль играет дифракция света в этом опыте.)

Поразительно, что этот достаточно тонкий оптический эффект наблюдался впервые и был подробно изучен еще в 1861 году французским оптиком-экспериментатором Арманом Физо. Он наблюдал, как проходит свет через очень узкий зазор между двумя полированными и посеребренными параллельными стеклянными пластинками и как зависит поляризация прошедшего света от величины зазора. Практически мы повторили часть опытов Физо, но ему удалось увидеть гораздо больше. Уменьшив зазор (и контролируя его размер) до величины порядка длины световой волны, Физо обнаружил, что такие предельно малые зазоры также способны поляризовать естественный свет, однако направление электрического вектора в этом случае оказывается перпендикулярным щели. Заметим, не вдаваясь в подробности, что сейчас на этом принципе работают поляризаторы инфракрасного излучения, представляющие собой систему близких расположенных параллельных тонких проволочек или металлических полосок.

Часть опытов Физо можно сравнительно легко повторить и даже получить количественную информацию, если воспользоваться лазером – интенсивным источником линейно поляризованного света. Подойдет простейший демонстрационный гелий-неоновый лазер ( $\lambda = 633$  нм) или модная в последнее время миниатюрная лазерная указка, излучающая линейно поляризованный красный свет мощностью около 1 мВт с диаметром пучка приблизительно 1 мм. Интенсивность милливаттного лазерного луча оказывается достаточной, чтобы вызвать фототок детектора, расположенного вблизи щечек микрометра, порядка 1 мкА при зазоре между щечками в 10 мкм.

Замените металл на «черный» диэлектрик с гладкими границами в зазоре микрометра – для этой цели удобно

воспользоваться кусочками засвеченной фотопленки, приклеив их к щечкам микрометра гладкой стороной наружу. Убедитесь, что при малом зазоре между пленками, равном 15–20 мкм, такое устройство тоже поляризует свет, почти как металлическая щель, хотя и с меньшим коэффициентом пропускания. Если увеличить зазор микрометра в 2–3 раза, эффект поляризации становится еле заметным или пропадает совсем. Для зазоров, меньших 10 мкм, интенсивность прошедшего света столь мала, что это затрудняет визуальные наблюдения.

### Опыт 3. Растянутая полиэтиленовая пленка между скрещенными поляроидами

Для опыта возьмите полиэтиленовую пленку толщиной около 100 мкм – из такой пленки обычно делают большие упаковочные мешки или покрытия парников. Пленка эта прозрачная, гладкая, мягкая на ощупь (по сравнению с лавсаном или целлофаном) и не такая упругая. В скрещенных поляроидах полиэтиленовая пленка при определенных ориентациях выглядит темной, хотя в поле зрения заметны светлые полосы, свидетельствующие о некоторой неоднородности пленки, связанной с технологией ее изготовления. Наблюдается также и небольшое двойное лучепреломление – видимо, из-за некоторой преимущественной ориентации линейных полимерных цепей полиэтилена.

Растяните пальцами небольшой участок пленки и поместите ее опять между поляроидами. Вас ожидает маленькое открытие: растянутый участок пленки будет окрашен яркими интерференционными цветами в виде полос, чем-то напоминающих цветное крыло бабочки. Посмотрите, как изменяется картина «бабочки» при вращении поляроидов. Наблюдаемое явление лежит в основе чувствительного метода обнаружения двойного лучепреломления вещества. Этот метод был открыт Араго в 1811 году и получил название хроматической поляризации.

А теперь нагрейте растянутый участок полиэтиленовой пленки над газовой конфоркой до размягчения пленки (но не до плавления!) – при наблюдении через поляриды цветные полосы пропадут!

### Опыт 4. Наблюдение пластмассовых тел через поляриоид

Этот опыт предлагается для самых ленивых экспериментаторов. Вам потребуется только один поляриоид – роль

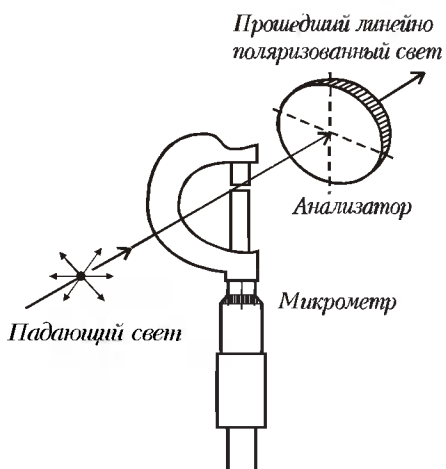


Рис. 5. Поляризация света с помощью микрометра



второго будет выполнять сам объект исследования. И растягивать образец вам не нужно: напряжение и связанная с ним оптическая анизотропия появились в образце изначально, при его изготовлении.

Объектом исследования может служить любая прозрачная пластмассовая деталь со стенками или линейка. Возьмите, например, коробку от аудиокассеты, поместите ее на темном фоне (подставке) и осветите лампой примерно под углом Брюстера – через поляроид вы будете наблюдать красивые цветные узоры. Эти узоры обычно сгущаются вблизи углов и кромок, швов и отверстий (см., например, фотографии

на 4-й странице обложки этого и предыдущего номеров журнала).

Оказывается, такого рода оптические наблюдения позволяют выявить напряжения в деталях машин и конструкций на прозрачных моделях сложной формы, подвергнутых механическим деформациям. Возникновение оптической анизотропии в прозрачных телах под нагрузкой называется фотоупругостью.

#### Задачи и упражнения

1. Для чего в фотографии используют поляризационные светофильтры-поляроиды?

2. Почему световым вектором называют вектор  $\vec{E}$ , а не  $\vec{B}$ ?

## ИНФОРМАЦИЯ

### Заочная школа юных физиков «Фотон»

В литовских школах с физикой как с отдельным предметом ученики начинают знакомиться в седьмом классе. Разумеется, не всех одинаково привлекают физика и математика. Но тем, кто интересуется, часто бывает недостаточно знаний, получаемых на уроках, и им надо помогать. Такую помощь литовским школьникам оказывает Заочная школа юных физиков «Фотон», организованная еще в 1972 году по инициативе Общества физиков Литвы при кафедре физики Шяуляйского педагогического института (в настоящее время – Шяуляйский университет) для учащихся старших классов средних школ и гимназий. (Первым председателем Совета школы стал организатор школы Миндаугас Стаквилевичюс. В Совет входят все преподаватели кафедры физики. В настоящее время председателем Совета является Владислава Кавалюнайте.)

В школу принимаются ученики десятых классов, приславшие правильные решения заданий вступительных экзаменов, публикуемых в учительской газете «Dialogas» («Диалог»). Обычно задание включает 8–10 сравнительно несложных вопросов и задач. Например, таких:

1. Какой пузырь со дна бассейна всплывет быстрее – большой или маленький?

2. Сколько таящего льда надо положить в 0,5 литра теплой воды, чтобы ее температура, падая на пять градусов, уменьшилась вдвое?

3. На сколько равных частей надо разделить проволоку с сопротивлением 98 Ом, чтобы после параллельного соединения этих частей получилось сопротивление 2 Ом?

4. Имеется алюминиевый шарик, объем которого 20 см<sup>3</sup> и масса 18 г. Как узнать:

есть ли пустота внутри шарика и в каком месте она находится?

5. На стол поставлены два плоских зеркала так, что они образуют угол 90°. Между зеркалами стоит свеча. Сколько свечей увидят ваши глаза?

Учеба в школе «Фотон» продолжается три года – до окончания средней школы. Сейчас в работе школы принимают участие более 2400 учеников 10–12 классов литовских школ, а также старшеклассники из русских школ.

В начале учебного года каждый поступивший получает книжечку, в которой имеются задания на весь учебный год (с определенными сроками выполнения), а также методические указания и примеры решения задач. Для каждого класса (курса) – по три задания (тура), в каждом из которых – по 20 задач. Сюда входят задачи теоретические и экспериментальные, простые и повышенной трудности. (Задачи подобраны по действующей программе по физике для средней школы.) Задания и методические указания для решения задач готовят преподаватели кафедры физики. Всего выпущено уже более 300 таких изданий.

Присылаемые работы учащихся проверяются, оцениваются в баллах и вместе с книжечкой, в которой подробно решены задачи данного тура, посылаются учащемуся обратно. Решения школьников проверяют студенты физико-математического факультета института.

Каждое лето 120 лучших учеников «Фотона» приглашаются в летний лагерь, который организуется в живописных местах Литвы. Здесь ребята до обеда занимаются физикой (лабораторные работы по механике и электричеству, решения задач, лекции ведущих ученых Литвы). После обеда – спортивные соревнования, вечера отдыха, туристические походы, викторины, конкурсы, экс-

3. Почему рулон тонкой гладкой полимерной пленки выглядит блестящим (как будто это рулон фольги или металлизированной пленки)?

4. Линейно поляризованный лазерный луч падает на лист белой бумаги. Почему при наблюдении через поляроид световое пятно на бумаге выглядит как неполяризованный источник света, хотя известно, что при рассеянии даже естественного света возможна частичная линейная поляризация пучка?

5. Подумайте, каким может быть принцип устройства поляризатора для рентгеновских лучей.

курсии. Уже организовано более 23 таких лагерей.

В апреле каждого года на торжественном собрании выпускникам «Фотона» вручают удостоверения об окончании школы с рекомендацией дальнейшего изучения точных наук. Всего за 26 лет школу «Фотон» окончили более 10000 учащихся.

Почему ученики поступают в «Фотон», что заставляет их дополнительно работать над физикой? В прошлом году на эти вопросы ответили около 200 десятиклассников. Выяснилось, что большинство учеников поступили в школу «Фотон» потому, что хотели углубить знания по физике, дополнительно подготовиться к дальнейшей учебе в высшей школе, повысить свой интеллектуальный уровень, испытать себя и свои возможности; а некоторые – мечтали провести лето в лагере «Фотон».

Большинство «фотонцев» поступают в высшие учебные заведения и успешно их заканчивают, при этом они выбирают специальности, в которых нужны знания по физике и математике. Так, по опросу 1998 года 30% учеников выбрали специальности инженера, 25% – доктора, 10% – физика, 7% – филолога, а также экономиста, психолога, социолога.

«Фотон» в некоторой степени помогает повышать свою квалификацию и учителям физики. С ними поддерживается постоянная связь, проводятся встречи на семинарах «Фотона», на конференциях, во время вручения удостоверения об окончании.

*Заведующая школой «Фотон»  
Л. Раулене*

# Задачи с проводящими сферами

А. ЧЕРНОУЦАН

**ЗАДАЧИ НА ЭЛЕКТРОСТАТИКУ.** В которых присутствуют одна или несколько проводящих сфер, традиционно оказываются трудными для многих абитуриентов. В особенности это относится к задачам на «перезарядку», где требуется выяснить, какие изменения произошли в системе при соединении отдельных проводников между собой. Большие трудности вызывают задачи на энергию системы проводников. Непреодолимым препятствием может оказаться и присутствие в задаче внешних зарядов (например, точечных), нарушающих сферическую симметрию системы.

Многие такие задачи решаются обычными школьными методами, в первую очередь – методом суперпозиции. Однако для успешного применения этих методов в задачах с проводящими сферами нужно хорошо понимать основные свойства проводников. А именно:

1) Проводник – это тело, в котором есть свободные заряды, способные перемещаться по объему проводника. В металлах, в частности, роль свободных зарядов играют электроны проводимости.

2) В электростатике рассматривается состояние равновесия системы, т.е. состояние, в котором отсутствует направленное движение зарядов (отсутствуют токи). Это означает, что напряженность электростатического поля в любой точке проводника должна быть равна нулю; в противном случае в окрестности этой точки немедленно начнется направленное движение свободных зарядов.

3) Все точки проводника имеют один и тот же потенциал, который называют потенциалом данного проводника. Поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность. Силовые линии поля вне проводника перпендикулярны к его поверхности.

4) Объемная плотность заряда внутри проводника равна нулю. Все не-

скомпенсированные заряды проводника находятся на его поверхности.

5) Если заданы заряды или потенциалы всех проводников системы, то можно найти только одно распределение зарядов на проводниках (и единственное распределение поля в пространстве между проводниками), соответствующее этим данным. Эта так называемая теорема единственности играет важную роль в электростатике.

6) Энергия уединенного проводника (энергия поля вокруг проводника) равна

$$W = \frac{1}{2} q\phi,$$

где  $q$  – заряд и  $\phi$  – потенциал проводника. Энергия системы проводников равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i.$$

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач. Начнем с задачи о поле уединенной заряженной сферы.

**Задача 1.** На уединенную проводящую сферу радиусом  $R$  нанесен заряд  $q$ . Найдите напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства. Вычислите потенциал сферы и ее энергию.

Из соображений симметрии очевидно, что заряд по поверхности сферы распределен равномерно. Напряженность поля внутри сферы равна нулю, а вне сферы напряженность такая же, как у поля точечного заряда  $q$ , помещенного в центр сферы:

$$E = 0 \text{ при } r < R,$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ при } r > R.$$

Что касается потенциала, то его удобнее найти сначала во внешней области. Так как напряженность поля сферы

совпадает с напряженностью поля точечного заряда, потенциалы этих полей могут различаться только константой, но, поскольку оба потенциала равны нулю на бесконечности, эта константа равна нулю. Следовательно,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \text{ при } r \geq R. \quad (1)$$

Из условия непрерывности потенциала делаем вывод, что потенциал внутри сферы (потенциал сферы) равен

$$\phi_{\text{сф}} = \phi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \text{ при } r \leq R. \quad (2)$$

Полученные результаты для напряженности и потенциала изображены графически на рисунке 1. Отметим, что вычисление потенциала можно начинать не с внешней, а с внутренней области. Дело в том, что центр сферы

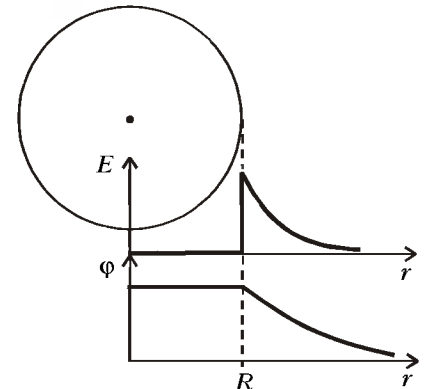


Рис. 1

находится на одном и том же расстоянии  $R$  от всех поверхностных зарядов, создающих поле, что позволяет легко вычислить потенциал в этой точке:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ц}} &= \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{R} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}. \quad (3) \end{aligned}$$

В данном случае такой подход выглядит менее естественным, но иногда он оказывается удобным.

Осталось вычислить энергию сферы:

$$W = \frac{1}{2} q\phi_{\text{сф}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Уместно лишний раз напомнить, что энергия сферы есть не что иное, как энергия электрического поля в пространстве вокруг сферы.

**Задача 2.** Проводящие сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$  находятся на большом

расстоянии друг от друга. Первая сфера заряжена зарядом  $q$ , вторая не заряжена. Сферы соединяют длинной тонкой проволокой. Какие заряды окажутся на сферах после этого? Какое количество теплоты выделится в процессе перезарядки? Зарядом на проволоке пренебречь.

После соединения система двух сфер вместе с проволокой будет представлять собой единый проводник. Значит, в результате перезарядки потенциалы сфер сравняются:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_2}{R_2},$$

где  $q'_1$  и  $q'_2$  — новые заряды сфер (рис.2). Полный заряд системы в ре-

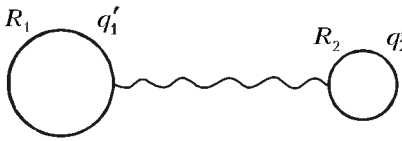


Рис. 2

зультате перезарядки не меняется, т.е.

$$q = q'_1 + q'_2.$$

Из этих уравнений можно вычислить заряды  $q'_1$  и  $q'_2$ :

$$q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q, \quad q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q.$$

Чтобы найти выделившееся количество теплоты, запишем закон сохранения энергии:

$$W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + Q,$$

подставим сюда выражения для начальной и конечной энергий:

$$W_{\text{нач}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1},$$

$$W_{\text{кон}} = \frac{q_1'^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2'^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)}$$

и получим искомую величину:

$$Q = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R_2}{(R_1 + R_2) R_1}.$$

В этой задаче при вычислении потенциалов и энергий можно было рассматривать каждую сферу как изолированную. Другая ситуация возникает в случае вложенных друг в друга концентрических сфер.

**Задача 3.** Две тонкие концентрические проводящие сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) несут на себе заряды  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Вычислите потенциалы сфер и энергию системы. Какой заряд останется на внутрен-

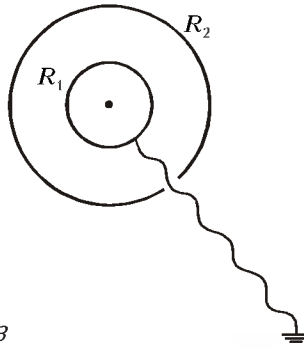


Рис. 3

ней сфере, если ее заземлить<sup>1</sup> (рис.3)? Как изменится при этом энергия системы?

Потенциал любой точки пространства можно найти по принципу суперпозиции — как сумму потенциала  $\varphi_1(r)$ , создаваемого зарядами первой сферы, и потенциала  $\varphi_2(r)$ , создаваемого второй сферой. Для каждой точки во внешней области ( $r \geq R_2$ ) оба слагаемых надо вычислять по формуле (1) — получится потенциал поля точечного заряда. Значит, потенциал внешней сферы ( $r = R_2$ ) равен

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_2}. \quad (4)$$

В пространстве между сферами ( $R_1 < r < R_2$ ) вклад внутренней сферы надо вычислять по формуле (1), а вклад внешней сферы — по формуле (2):

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}.$$

Положив в этой формуле  $r = R_2$ , мы опять получим потенциал внешней сферы, а положив  $r = R_1$ , получим ответ для потенциала внутренней сферы:

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}. \quad (5)$$

Такой же потенциал будет у всех точек при  $r < R_1$ .

Энергия этой системы зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} q_1 \varphi(R_1) + \frac{1}{2} q_2 \varphi(R_2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1^2}{R_1} + \frac{2q_1 q_2}{R_2} + \frac{q_2^2}{R_2} \right).$$

Первый и третий члены представляют собой собственные энергии сфер, а второй член — энергию их взаимодействия.

После заземления внутренней сферы ее потенциал станет равным нулю. Применяя формулу (5), получим урав-

<sup>1</sup> Заземляющая проволока проходит через маленькое отверстие во внешней сфере без контакта с ней.

нение для нового заряда этой сферы:

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

откуда найдем

$$q'_1 = -q_2 \frac{R_1}{R_2}.$$

С помощью формулы (4) найдем теперь новый потенциал внешней сферы:

$$\begin{aligned} \varphi'(R_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1 + q_2}{R_2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2(R_2 - R_1)}{R_2^2}. \end{aligned}$$

Поскольку потенциал внутренней сферы теперь равен нулю, энергия системы в конечном состоянии равна

$$W' = \frac{1}{2} q_2 \varphi'(R_2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_2^2 (R_2 - R_1)}{R_2^2}.$$

Видно, что конечная энергия системы меньше начальной. Это и понятно. Уменьшение электростатической энергии системы равно тому количеству теплоты, которое выделилось при перезарядке.

**Задача 4.** Три концентрические проводящие сферы имеют радиусы  $R$ ,  $2R$  и  $3R$ . Внутренняя и внешняя сферы не заряжены, заряд средней сферы равен  $q$ . В некоторый момент внутреннюю и внешнюю сферы соединяют проволокой (рис. 4). Какой заряд пройдет по

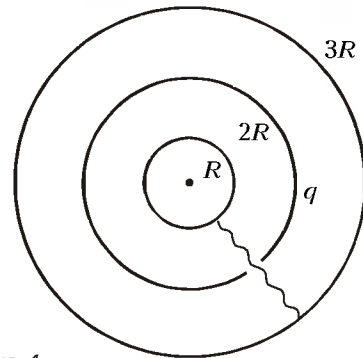


Рис. 4

этой проволоке, и какое при этом выделится количество теплоты?

Обозначим конечный заряд внешней сферы  $q'$ , тогда заряд внутренней сферы будет  $-q'$ . Применяя метод суперпозиции аналогично тому, как мы это делали в задаче 3, вычислим конечные потенциалы внутренней и внешней сфер и приравняем их друг другу. Потенциал внутренней сферы равен

$$\varphi'(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{q'}{R} + \frac{q}{2R} + \frac{q'}{3R} \right)$$

(для вклада от всех трех сфер можно

применять формулу (2) или найти потенциал центра – аналогично задаче 1). Потенциал внешней сферы равен

$$\varphi'(3R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{q'}{3R} + \frac{q}{3R} + \frac{q'}{3R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{3R}.$$

Приравнявая потенциалы, находим

$$q' = \frac{q}{4}.$$

Именно такой заряд и пройдет по проволоке с внутренней сферы на внешнюю.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся законом сохранения энергии. Начальная энергия системы равна просто энергии средней сферы, т.е.

$$W = \frac{1}{2} q\varphi(2R) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2R}.$$

Конечная энергия системы равна

$$W' = -\frac{1}{2} q' \varphi'(R) + \frac{1}{2} q \varphi'(2R) + \frac{1}{2} q' \varphi'(3R) = \frac{1}{2} q \varphi'(2R)$$

(мы учли, что потенциалы внешней и внутренней сфер равны друг другу). Для конечного потенциала средней сферы запишем

$$\varphi'(2R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{q'}{2R} + \frac{q}{2R} + \frac{q'}{3R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{11q}{24R}$$

(для вклада внутренней сферы применяем формулу (1), а для вклада внешней – формулу (2)). Окончательно, выделившееся количество теплоты будет равно

$$Q = W - W' = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{q^2}{2R} - \frac{11q^2}{24R} \right) = \frac{1}{192\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

В следующей задаче выясним, как изменяется потенциал проводящей сферы в присутствии точечного заряда.

**Задача 5.** Проводящая сфера радиусом  $R$  заряжена зарядом  $Q$ . Каким станет потенциал сферы, если на расстоянии  $l$  от ее центра поместить точечный заряд  $q$ ? Разобрать случаи  $l > R$  и  $l < R$ .

На первый взгляд, эта задача гораздо труднее предыдущей, поскольку присутствие точечного заряда нарушает сферическую симметрию, и распределение заряда по поверхности сферы становится неравномерным. Действительно, получить полное описание, т.е.

найти распределение зарядов на сфере и поле вокруг нее, совсем не просто, хотя и возможно. Это можно сделать, например, с помощью метода электростатических изображений, неоднократно описанного на страницах «Кванта» (последний раз – в №1 за 1996 г.). Однако ответить на поставленный в задаче вопрос можно довольно просто, опираясь на симметрию сферы и теорему единственности.

Начнем со случая  $l > R$  (рис. 5). В этом случае потенциалы всех точек сферы одинаковые, и достаточно найти потенциал какой-нибудь одной точ-

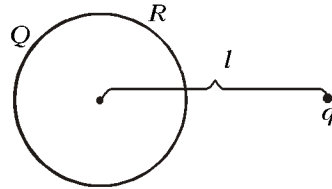


Рис. 5

ки. Ясно, что мы выберем центр сферы. Вклад зарядов, распределенных по поверхности сферы, вычисляется так же, как в задаче 1 (см. формулу (3)), и составляет  $\sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \Delta Q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$  (поскольку в этом вычислении никак не используется равномерность распределения заряда – ответ зависит только от полного заряда сферы). Остается учесть вклад точечного заряда и записать

$$\varphi(R) = \varphi(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l}. \quad (6)$$

Видно, что потенциал сферы при помещении рядом с ней точечного заряда изменился на величину потенциала, создаваемого этим зарядом в центре сферы. Во избежание недоразумений отметим, что существует *единственное* распределение зарядов по поверхности сферы, при котором потенциал *всех внутренних точек* сферы равен полученному значению.

Перейдем к случаю  $l < R$  (рис. 6). Так как теперь заряд находится внутри сферы, напряженность поля внутри сферы не равна нулю и потенциалы различных точек не равны друг другу. Однако и в этом случае несложно определить потенциал сферы, только надо обратить внимание не на внутреннюю часть сферы, а на окружающее ее внешнее пространство. Оказывается, поле во внешнем пространстве не зависит от положения заряда  $q$  внутри сферы, т.е. при перемещении заряда по внутренней области поле во внешней области не меняется.

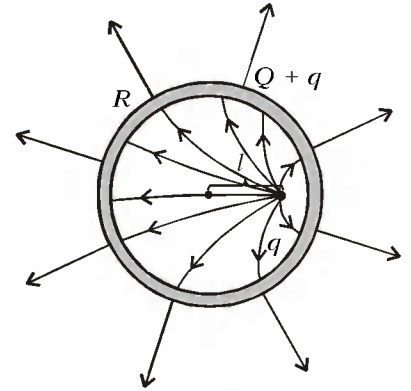


Рис. 6

Это утверждение верно для полого проводника любой формы, и следует оно из теоремы единственности. Поле во внешнем пустом пространстве однозначно определяется следующими условиями: 1) потенциал на бесконечности равен нулю; 2) потенциал на поверхности проводника принимает некоторое постоянное значение; 3) полный заряд внутри этой поверхности известен, т.е. известно полное число силовых линий, начинающихся на поверхности проводника. Существует единственное поле, удовлетворяющее этим условиям.

Для сферического проводника поле во внешней области совпадает с полем точечного заряда  $Q + q$ . При этом заряд на сфере распределится следующим образом: на внутренней поверхности сферы будет находиться заряд  $-q$ , поскольку здесь заканчиваются все силовые линии, начинающиеся на заряде  $q$ , а на внешней поверхности сферы равномерно распределится заряд  $Q + q$ . Следовательно, потенциал сферы в этом случае равен

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad (7)$$

и не зависит от расстояния  $l$ .

А теперь попробуем ответить на такой вопрос: *чему будет равен потенциал проводящей сферы, несущей заряд  $Q$ , в присутствии двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , расположенных на расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  от центра сферы ( $l_1 < R < l_2$ )?* Может показаться, что здесь нельзя применить ни одно из рассуждений, использованных в случае только одного заряда. Действительно, для первой части задачи было важно, что напряженность поля внутри сферы равна нулю, а для второй – что вне сферы нет зарядов. Но теорема единственности позволяет ответить на поставленный вопрос с помощью суперпозиции рассмотренных выше двух случаев расположения заряда относительно сферы.



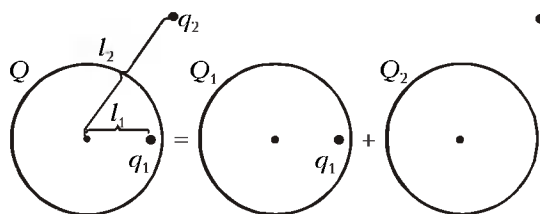


Рис. 7

Разобьем задачу на две части. Сначала рассмотрим заряд  $q_1$  на расстоянии  $l_1$  от сферы с зарядом  $Q_1$ , а затем — заряд  $q_2$  на расстоянии  $l_2$  от сферы с зарядом  $Q_2$ , при этом  $Q_1 + Q_2 = Q$  (рис.7). Потенциал сферы в первом случае определяется формулой (7), а во втором случае — формулой (6). А теперь наложим первую систему на вторую. Так как потенциалы всех точек сферы были постоянными в каждом из случаев, при наложении систем они тоже будут постоянными, а заряд сферы будет равен  $Q$ . Следовательно, полученное при наложении распределение зарядов по поверхности сферы и будет правильным (теорема единственности). Для потенциала сферы получим

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{l_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R}$$

Этот результат естественным образом обобщается на любое количество точечных зарядов. Интересно отметить, что отсюда следует своеобразная эквивалентность точечных зарядов и

заряженных сфер в задаче, где требуется определить потенциал проводящей сферы. Поскольку вклад от точечного заряда в потенциал сферы зависит только от расстояния  $l$  между этим зарядом и центром сферы, потенциал сферы не изменится, если мы «размажем» этот заряд по поверхности воображаемой сферы радиусом  $l$ . Сравните, например, формулу (5) с формулой (6), а формулу (4) с формулой (7).

**Задача 6.** Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Между сферами на расстоянии  $r$  от центра находится точечный заряд  $q$ . Какие заряды появятся на сферах, если их заземлить?

Выразим потенциалы сфер и приравняем их к нулю. Потенциал внутренней сферы равен потенциалу центра, т.е.

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — заряды сфер (после заземления). Поле во внешнем пространстве совпадает с полем точечного заряда  $q_1 + q + q_2$ , поэтому потенциал внешней сферы равен

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q + q_2}{R_2}.$$

Теперь приравняем потенциалы обеих

сфер к нулю, решим полученные уравнения и найдем искомые заряды:

$$q_1 = -q \frac{\frac{R_2}{r} - 1}{\frac{R_2}{R_1} - 1}, \quad q_2 = -q \frac{1 - \frac{R_1}{r}}{1 - \frac{R_1}{R_2}}.$$

**Упражнения**

**1.** Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Внутренняя сфера заряжена зарядом  $q$ , внешняя сфера не заряжена. Каким станет потенциал внутренней сферы, если внешнюю сферу заземлить? Как изменится при этом энергия системы?

**2.** Имеются три концентрические проводящие сферы радиусами  $R_1$ ,  $R$  и  $R_2$  ( $R_1 < R < R_2$ ). Среднюю сферу заряжают зарядом  $q$ , а внутреннюю и внешнюю сферы заземляют. Какие заряды появятся на этих сферах?

**3.** На расстоянии  $l$  от центра заземленной проводящей сферы радиусом  $R$  помещают точечный заряд  $q$ . Какой заряд появится на сфере?

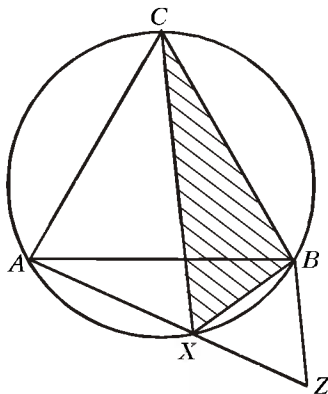
**4.** Проводящую сферу радиусом  $R$  заземляют, а на расстояниях  $l_1 < R$  и  $l_2 > R$  от ее центра помещают точечные заряды  $q_1$  и  $q_2$ . Какой заряд появится на сфере?

**5.** Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами  $R$  и  $3R$ . Между сферами на расстоянии  $2R$  от их центра находится точечный заряд  $q$ . Какие заряды окажутся на сферах, если их соединить тонкой проволокой?

**Еще два доказательства свойства правильного треугольника**

В первом номере за 1999 год в статье «Вписанные многоугольники» тремя способами доказано, что если на дуге  $AB$  описанной окружности равностороннего треугольника  $ABC$  взята точка  $X$ , то  $AX + BX = CX$  (см. рисунок).

Между тем есть еще два замечательных доказательства. Во-первых, мы можем построить на отрезке  $XB$  вовне правильный треугольник  $XZB$ . При повороте вокруг точки  $B$  на  $60^\circ$  точка  $C$  переходит в  $A$ ,  $X$  — в  $Z$ , треугольник  $CXB$  — в треугольник  $AZB$ . Значит,  $CX = AZ$ . Поскольку сумма противо-



ложных углов вписанного четырехугольника  $AXBC$  равна  $180^\circ$ , имеем  $\angle AXB = 120^\circ$ , так что точки  $A, X, Z$

лежат на одной прямой. Следовательно,

$$AX + BX = AX + XZ = AZ = CX.$$

Во-вторых, можно бесхитростно применить теорему косинусов: обозначив  $AB = BC = CA = l$ ,  $AX = a$ ,  $BX = b$ ,  $CX = c$ , находим из  $\triangle AXC$  и  $\triangle CXB$ :

$$l^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ, \\ l^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ.$$

Вычитая почленно, получаем  $a^2 - b^2 - ac + bc = 0$ , откуда

$$(a - b)(a + b - c) = 0.$$

Осталось разделить на  $a - b$ . (Случай  $a = b$  легко разобрать отдельно.)

М.Панк

# LXII Московская МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

## Избранные задачи окружного тура

1. К Саше в день рождения пришли 5 друзей. Первому он дал  $1/6$  часть пирога, второму –  $1/5$  часть остатка, третьему –  $1/4$  часть того, что осталось, четвертому –  $1/3$  нового остатка, пятому –  $1/2$  последнего остатка. Кто из друзей Саши получил самый большой кусок пирога? (5)<sup>1</sup>

*А.Шевкин*

2. В левом нижнем углу листа клетчатой бумаги стоит шахматный конь. Ему разрешается делать прыжки только двух видов: либо на две клетки вверх, а затем на клетку вправо, либо на две клетки вправо, а затем на клетку вверх. Конь попал в клетку, расположенную на 40 клеток правее и на 50 клеток выше исходного положения. За сколько прыжков он это сделал? (5, 6)

*Б.Чамов*

3. Раскрасьте клетки доски  $4 \times 4$  в 4 цвета так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, каждом вертикальном ряду и на каждой из двух диагоналей оказались клетки, покрашенные в каждый из четырех цветов. (5)

*А.Спивак*

4. Разрежьте плоскость 6 прямыми так, чтобы все пары прямых пересекались в разных точках, а среди получившихся частей оказалось ровно 4 треугольника. (6, 7)

*А.Ковальджи*

5. Разрежьте квадрат  $5 \times 5$  клеток по линиям сетки на 7 различных прямоугольников (прямоугольники считаются различными, если их нельзя наложить друг на друга так, чтобы они совпали). (7)

*И.Рубанов*

6. В классе 24 ученика. Каждый из них любит либо физику, либо лирику, либо и то и другое. Оказалось, что среди любителей физики 20% любителей лирики, а среди любителей лирики – 25% любителей физики. Сколько учеников любят одновременно и физику, и лирику? (7)

*А.Ковальджи*

7. Длины сторон треугольника – целые числа. Длина одной стороны равна 5, другой – 1. Найдите длину третьей стороны. (8)

*И.Таурова*

8. В клетчатом квадрате размером  $5 \times 5$  расставьте 5 единиц, 5 двоек, 5 троек, 5 четверок и 5 пятерок так, чтобы сумма чисел в любом квадрате размером  $2 \times 2$  (со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата) была одна и та же. (8)

*А.Спивак*

9. Два круга, площади которых 1 кв. см и 5 кв. см, пересекаются.  $S_1$  – площадь той части меньшего круга, которая не входит в больший круг;  $S_2$  – площадь той части большего круга, которая не входит в меньший. Найдите разность площадей  $S_2 - S_1$ . (10)

*И.Таурова*

10. Числа  $a, b, c, d$  таковы, что при любых значениях  $x$  выполняется равенство

$$3(x+a)^4 = (x+b)^4 + (x+c)^4 + (x+d)^4.$$

Докажите, что  $a = b = c = d$ . (10, 11)

*А.Ковальджи*

11. В ряд стоят 1999 чисел. Первое число равно 1. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних. Найдите последнее число. (10)

*В.Сендеров*

12. В телесериале «Математики тоже плачут» 15 героев. В каждой серии с одним из героев происходит одно из трех событий: либо он узнает тайну, либо он узнает, что другой герой знает тайну, либо он узнает, что другой герой не знает тайны. Каково максимально возможное число серий? (Тайна одна, изначально ее никто не знает, про каждого двух героев  $A$  и  $B$  серия типа « $A$  узнал, что  $B$  тайны не знает» бывает только одна.) (10)

*А.Канель*

13. Дан график гиперболы  $y = 1/x$ . Проведены 100 вертикальных прямых через точки  $x = 1, 2, 3, \dots, 100$ . Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_{100}$  – точки пересечения прямых с гиперболой. Построены 99

прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, для которых отрезки  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{99}A_{100}$  являются диагоналями. Найдите сумму площадей этих прямоугольников. (11)

*Д.Александров*

14. Цилиндрическую кружку диаметром 2 и высотой 2, наполненную доверху водой, отклонили от вертикали на  $30^\circ$  (угол между осью кружки и вертикалью). Какая доля воды выльется? (11)

*Фольклор*

15. В окружность диаметром 1 вписали правильный 10-угольник и отметили на окружности произвольную точку. Найдите сумму квадратов расстояний от этой точки до вершин 10-угольника. (11)

*Е.Юрченко*

## Городская олимпиада

### 6 класс

1. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили еще по точке. Такое «уплотнение» повторили еще дважды (всего 3 раза). В результате на прямой оказалось отмечено 113 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

*Д.Калинин*

2. Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение – 420.

*Д.Калинин*

3. Квадрат  $4 \times 4$  разделен на 16 клеток. Раскрасьте эти клетки в черный и белый цвета так, чтобы у каждой черной клетки было три белых соседа, а у каждой белой клетки был ровно один черный сосед. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

*Фольклор*

4. Из Москвы вылетел вертолет, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, затем 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. Оказался ли он южнее Москвы, севернее ее или на той же широте? Оказался ли он восточнее Москвы,

<sup>1</sup> В скобках указаны классы, в которых предлагалась задача.

западнее Москвы или на той же долготе?

*Фольклор*

5. Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в углах клеток, две медианы которого перпендикулярны. (Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.)

*Р.Гордин*

6. На плоскости нарисован черный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала часть черного квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

*В.Гуровиц*

### 7 класс

1. Числитель и знаменатель дроби – целые положительные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит  $1/3$ . Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

*Р.Федоров*

2. Разрежьте данную фигуру (рис. 1) по границам клеток на три равные

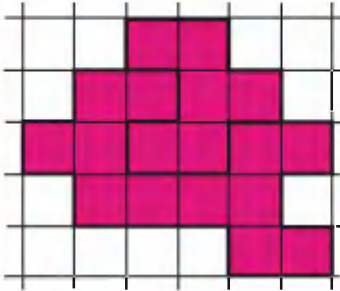


Рис. 1

(одинаковые по форме и величине) части.

*Д.Калинин*

3. См. задачу 4 для 6 класса.

4. Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шел с постоянной скоростью. Один шел из  $A$  в  $B$ , другой – из  $B$  в  $A$ . Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один в  $B$  в 4 часа вечера, а другой – в  $A$  в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

*Фольклор*

5. См. задачу 5 для 6 класса.

6. Квадрат разбили на 100 прямоугольников девятью вертикальными и девятью горизонтальными прямыми (параллельными его сторонам). Среди этих прямоугольников оказалось ровно 9 квадратов. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных.

*В.Произволов*

### 8 класс

1. Сравните дроби  $x = \frac{111110}{222221}$ ,  $y = \frac{333331}{111111}$ ,  $z = \frac{333334}{222223}$ , расположите их в порядке возрастания.

*Фольклор*

2. Покажите, как любой четырехугольник разрезать на три трапеции (параллелограмм тоже можно считать трапецией).

*В.Произволов*

3. Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа  $a, b, c, d$ , для которых числа  $a^2 + 2cd + b^2$  и  $c^2 + 2ab + d^2$  являются полными квадратами.

*В.Произволов, В.Сендеров*

4. Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

*А.Толпыго*

5. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $O$  – середина гипотенузы  $AC$ . На отрезке  $AB$  взята точка  $M$ , а на отрезке  $BC$  – точка  $N$  так, что угол  $MON$  – прямой. Докажите, что  $AM^2 + CN^2 = MN^2$ .

*В.Произволов*

6. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую – черными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью –  $\frac{1}{2}$  очка, за поражение – 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

*Б.Френкин*

### 9 класс

1. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня.

(Средним арифметическим двух чисел  $a$  и  $b$  называется число  $\frac{a+b}{2}$ , а средним гармоническим – число  $2 / \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ .)

*А.Канель*

2. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы  $A$  и  $B$  (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). После того как оба игрока сделают по 1999 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т.е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

*В.Измestьев*

3. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Окружность, проходящая через точки  $A, O, B$ , касается прямой  $BC$ . Докажите, что окружность, проходящая через точки  $B, O, C$ , касается прямой  $CD$ .

*А.Заславский*

4. Найдите все такие целые положительные  $k$ , что число  $\frac{1 \dots 12 \dots 2}{2000} - \frac{2 \dots 2}{1001}$  является квадратом целого числа.

*Е.Осьмова*

5. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  ( $AB > BC$ ) касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно,  $RS$  – средняя линия, параллельная  $AB$ ,  $T$  – точка пересечения прямых  $PQ$  и  $RS$ . Докажите, что  $T$  лежит на биссектрисе угла  $B$  треугольника.

*М.Евдокимов*

6. В соревнованиях по  $n$ -борью участвуют  $2^n$  человек. Для каждого спортсмена известна его сила в каждом из видов программы. Соревнования проходят следующим образом: сначала все спортсмены участвуют в первом виде программы и лучшая половина из них выходит в следующий круг. Эта половина принимает участие в следующем виде и половина из них выходит в следующий круг, и т.д., пока в  $n$ -м виде программы не будет определен победитель. Назовем спортсмена «возможным победителем», если можно так расставить виды спорта в программе, что он станет победителем.

а) Докажите, что может так случиться, что хотя бы половина спортсменов является «возможными победителями»;

б) докажите, что всегда число «возможных победителей» не превосходит  $2^n - n$ ;

в) докажите, что может так случиться, что «возможных победителей» ровно  $2^n - n$ .

*А.Герко*

**10 класс**

1. Известно, что  $(a + b + c)c < 0$ . Докажите, что  $b^2 > 4ac$ .

*Фольклор*

2. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Третья окружность с центром в точке  $P$  пересекает первую в

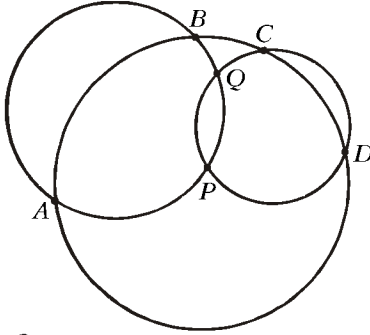


Рис. 2

точках  $A$  и  $B$ , а вторую – в точках  $C$  и  $D$  (рис.2). Докажите, что углы  $AQD$  и  $BQC$  равны.

*А.Заславский*

3. Найдите все такие пары натуральных чисел  $x, y$ , что числа  $x^3 + y$  и  $y^3 + x$  делятся на  $x^2 + y^2$ .

*С.Злобин*

4.  $2n$  радиусов разделили круг на  $2n$  равных секторов:  $n$  синих и  $n$  красных. В синие секторы, начиная с некоторого, подряд записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до  $n$ . В красные секторы, начиная с некоторого, записываются те же числа и таким же образом, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до  $n$ .

*В.Произволов*

5. Кузнечик прыгает по отрезку  $[0; 1]$ . За один прыжок он может попасть из точки  $x$  либо в точку  $x/\sqrt{3}$ , либо в точку  $x/\sqrt{3} + (1 - 1/\sqrt{3})$ . На отрезке  $[0; 1]$  выбрана точка  $a$ . Докажите, что, начиная из любой точки, кузнечик может через несколько прыжков оказаться на расстоянии меньше  $1/100$  от точки  $a$ .

*А.Буфетов*

6. Для чисел  $1, \dots, 1999$ , расставленных по окружности, вычисляется сумма произведений всех наборов из 10 чисел, идущих подряд. Найдите расстановку чисел, при которой полученная сумма наибольшая.

*Д.Дерягин*

**11 класс**

1.  $a, b, c$  – стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3.$$

*В.Сендеров*

2. Плоская выпуклая фигура ограничена отрезками  $AB$  и  $AD$  и дугой  $BD$

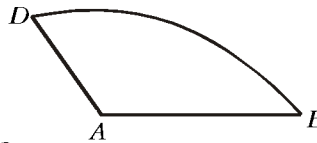


Рис. 3

некоторой окружности (рис.3). Постройте какую-нибудь прямую, которая делит пополам: а) периметр этой фигуры; б) ее площадь.

*В.Произволов, В.Сендеров*

3. Грани правильного октаэдра раскрашены в белый и черный цвета. При этом любые две грани, имеющие общее

ребро, покрашены в разные цвета. Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей черных граней.

*Д.Терешин*

4. На лугу, имеющем форму квадрата, имеется круглая лунка. По лугу прыгает кузнечик. Перед каждым прыжком он выбирает вершину и прыгает по направлению к ней. Длина прыжка равна половине расстояния до этой вершины. Сможет ли кузнечик попасть в лунку?

*А.Буфетов, А.Канель*

5. Граф – это набор вершин, причем некоторые из них соединены ребрами (каждое ребро соединяет ровно две вершины графа). Раскраска вершин графа называется правильной, если вершины одного цвета не соединены ребром. Некоторый граф правильно раскрашен в  $k$  цветов, причем его нельзя правильно раскрасить в меньшее число цветов. Докажите, что в этом графе существует путь, вдоль которого встречаются вершины всех  $k$  цветов ровно по одному разу.

*Н.Чернятьев*

6. Решите в натуральных числах уравнение  $(1 + n^k)^l = 1 + n^m$ , где  $l > 1$ .

*Г.Челноков, В.Сендеров*

7. Докажите, что первые цифры чисел вида  $2^{2^n}$  образуют непериодическую последовательность.

*А.Канель*

*Публикацию подготовили В.Бугаенко, А.Ковальджи, В.Сендеров, Р.Федоров, А.Шень, И.Яценко*

# Московский отбор на Российскую математическую олимпиаду

**Избранные задачи**

1. Имеются черные и белые интервалы. Сумма длин черных 1, и белых 1. Докажите, что их можно так расположить на отрезке длины 1,5, что интервалы одного цвета не пересекаются, а любые два интервала разных цветов

либо не пересекаются, либо находятся один внутри другого. (9)<sup>1</sup>

2. Докажите, что уравнение  $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2 + 1$  имеет в натураль-

<sup>1</sup> В скобках указаны классы, в которых предлагалась задача.

ральных числах бесконечно много решений таких, что  $x > 2000, y - x > 2000$ . (10)

*В.Сендеров*

3. Внутри равностороннего треугольника  $A_1A_2A_3$  площади  $S_1$  находится равносторонний треугольник  $B_1B_2B_3$



площади  $S_2$ , причем точка  $B_3$  удалена от стороны  $A_1A_2$  не дальше, чем точки  $B_1$  и  $B_2$ . Обозначим через  $S$  площадь шестиугольника  $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ . Докажите, что  $\sqrt{S_1S_2} \leq S \leq 2\sqrt{S_1S_2}$ . (9, 10)

*В.Кириченко*

4.  $2^n$  человек хотят разыграть кубок по олимпийской системе, причем для каждой пары заранее известно, кто выигрывает. Докажите, что можно так составить расписание, что человек, выигрывающий у наибольшего числа людей (если такой есть), выигрывает кубок. (10)

5. Укажите такую рациональную функцию с целыми коэффициентами, область значений которой – отрезок  $[\sqrt{2}; 2]$  (функция должна быть определена на всей вещественной прямой). (11)

*В.Сендеров*

6. Противоположные стороны четырехугольника  $ABCD$  продлены до пересечения в точках  $M$  и  $N$ . Из точки пересечения диагоналей  $O$  на прямую  $MN$  опущен перпендикуляр, пересекающий эту прямую в точке  $P$ . Докажите, что углы  $APC$  и  $OPC$  равны. (11)

*А.Заславский*

7. В некоторых клетках бесконечной клетчатой доски стоят фишки. Расстановка фишек называется почти плотной, если в каждом квадрате  $n \times n$  не более  $10n$  пустых клеток (для любого  $n$ ). Докажите, что существует такое  $d$ , что в любой почти плотной расстановке можно заполнить все клетки, сдвинув каждую фишку на расстояние, меньшее  $d$ . (11)

*М.Вялый, А.Канель*

Публикацию подготовил  
*Г.Челноков*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады 1999 года

## Первый теоретический тур

### 8 класс

1. Система из двух сообщающихся вертикальных цилиндров, заполненных жидкостью плотностью  $\rho$ , закрыта поршнями, массы которых  $M_1$  и  $M_2$ . В положении равновесия поршни находятся на одной высоте. Если на поршень массой  $M_1$  положить груз массой  $m$ , то поршень массой  $M_2$  поднимется после установления равновесия на высоту  $h$  относительно начального положения. На какую высоту поднимется относительно начального положения равновесия поршень массой  $M_1$ , если груз массой  $m$  переложить на поршень массой  $M_2$ ?

*О.Шведов*

2. В фарфоровую чашку массой  $m_{\text{ф}} = 100$  г, находящуюся при комнатной температуре  $T_{\text{к}} = +20$  °С, наливают  $m_1 = 150$  г горячего кофе при температуре  $T_1 = +90$  °С. Затем достают из холодильника брикет мороженого, имеющий температуру  $T_2 = -12$  °С, и серебряной ложкой, масса которой  $m_{\text{л}} = 15$  г, кладут понемногу мороженое в кофе, каждый раз размешивая его. Так поступают до тех пор, пока не установится температура  $T_3 = +45$  °С, когда кофе приятно пить. Оцените, сколько грамм мороженого надо положить для этого в кофе. Потерями тепла пренебречь. Считать известными удельные теплоемкости воды  $c_{\text{в}} = 4,2$  Дж/(г·°С), льда  $c_{\text{л}} = 2,1$  Дж/(г·°С), серебра

$c_{\text{с}} = 0,23$  Дж/(г·°С), фарфора  $c_{\text{ф}} = 0,8$  Дж/(г·°С) и удельную теплоту плавления льда  $\lambda = 340$  Дж/г.

*М.Семенов*

### 9 класс

1. У квадратного стола со стороной  $L = 1$  м и высотой  $H = 1$  м одна ножка на  $a = 3$  см короче остальных, и стол может качаться. Если поставить стол ровно, то он стоит, но достаточно легкого толчка, чтобы он накренился на короткую ножку. Для того чтобы после этого стол вернулся в первоначальное положение, нужно положить на угол, противоположный короткой ножке, грузик массой  $m = 300$  г. Найдите массу крышки стола, пренебрегая массой ножек. Считать ножки тонкими и расположенными по углам крышки стола.

*А.Андрянов*

2. Сплошной шарик из алюминия диаметром  $d = 1$  см бросили в 50-процентный раствор азотной кислоты. В данных условиях с одного квадратного сантиметра поверхности растворяется  $10^{-4}$  г алюминия в час. Через какое время шарик полностью растворится в кислоте? Плотность алюминия  $\rho = 2,7$  г/см<sup>3</sup>.

*С.Варламов*

### 10 класс

1. Согласно сериалу «Звездные войны», космические истребители земного флота имеют форму креста, где

на концах консолей расположены 4 одинаковых ракетных двигателя (вид истребителя спереди изображен на рисунке 1). Одним из пилотажных

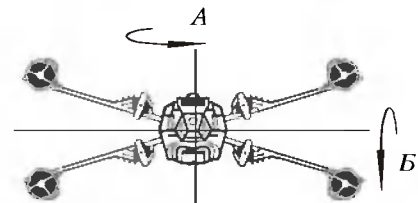


Рис. 1

маневров такого истребителя является быстрый разворот на 180°, когда два соседних двигателя работают на «полный вперед», а два остальных – на «полный назад» с такой же тягой. Вокруг какой оси – А или Б – нужно совершать такой разворот, чтобы он занял меньше времени? Считать, что практически вся масса истребителя сосредоточена в его двигателях и что сила тяги не зависит от скорости. Маневр совершается в открытом космосе.

*А.Андрянов*

2. В системе, изображенной на рисунке 2, нить невесома и нерастяжима, блоки невесома, трение отсутствует. Массы грузов равны  $m_1$  и  $m_2$ . Найдите уско-

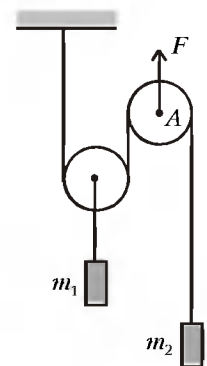


Рис. 2

рение оси блока  $A$ , к которой приложена в вертикальном направлении сила  $F$ .

*М.Семенов*

3. Частица, обладающая массой  $m$  и зарядом  $q$ , пролетела мимо длинной хорошо проводящей металлической пластины шириной  $L$  на расстоянии  $d$  от нее перпендикулярно длинной сто-

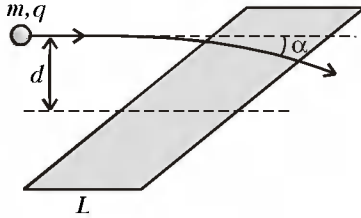


Рис. 3

роне пластины (рис.3). Расстояние  $d$  много меньше  $L$ . Направление движения частицы после пролета изменилось на небольшой угол  $\alpha \ll d/L \ll 1$ . Какую скорость имела частица вначале?

*С.Варламов*

**11 класс**

1. Нагрузка подключена к источнику с выходным напряжением  $U = 2$  кВ с помощью длинной двухполосковой линии. Полоски линии имеют ширину  $a = 4$  см и расположены на расстоянии  $b = 4$  мм параллельно одна над другой. При некотором сопротивлении нагрузки, много большем сопротивления проводников линии, сила взаимодействия полосок равна нулю. Какой по величине и направлению будет эта сила в расчете на единицу длины линии, если сопротивление нагрузки увеличить в  $n = 5$  раз?

*В.Погожев*

2. На каком расстоянии от въезда на станцию метро находится поезд, когда пассажир, стоящий на краю платформы около конца тоннеля, начинает видеть блик от света фар на рельсах? Перед въездом на станцию расположен достаточно длинный поворот с радиусом закругления  $R$ . Считать, что тоннель горизонтален, а его сечение – прямоуг-

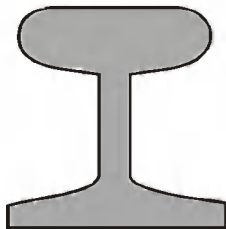


Рис. 4

моугольник шириной  $l \ll R$ , расстояние между рельсами  $h \ll R$ , фары поезда расположены точно над рельсами, профиль рельса изображен на рисунке 4.

*Р.Компанец*

**Второй теоретический тур**

**8 класс**

1. Автомобиль движется с постоянной скоростью. В начале движения секундная стрелка часов с обломанной минутной стрелкой показывает 0 секунд, через 3 км – 30 секунд, еще через 4 км – 50 секунд. Найдите скорость автомобиля, если известно, что она больше 40 км/ч.

*О.Шведов*

2. В металлический стакан налили  $m = 40$  г жидкости и начали нагревать его на спиртовке, непрерывно измеряя температуру стакана. В результате был получен график зависимости температуры стакана от времени, приведенный на рисунке 5. Пользуясь графи-

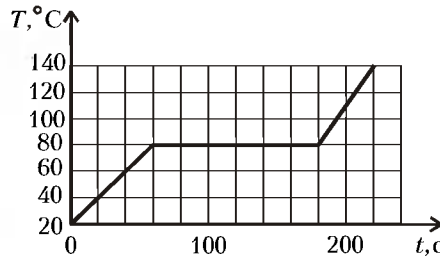


Рис. 5

ком, найдите удельную теплоемкость  $c_{ж}$  и удельную теплоту парообразования  $L_{ж}$  жидкости, налитой в стакан, если в спиртовке ежесекундно сгорает  $\mu = 11$  мг спирта. Удельная теплота сгорания спирта  $q = 27$  кДж/г. Потери тепла пренебречь.

*А.Якута*

**9 класс**

1. Сферическая дробинка диаметром  $d_1$  и плотностью  $\rho_d$  падает в жидкости плотностью  $\rho_{ж} = \rho_d/8$  со скоростью  $v_1$ . Дробинка диаметром  $d_2 = 2d_1$  падает в той же жидкости со скоростью  $v_2 = 4v_1$ . С какой скоростью будет всплывать в этой жидкости сферический пузырек воздуха диаметром  $d_3 = 1,5d_1$ ? Считать силу вязкого трения, действующую на шарик в жидкости, пропорциональной скорости шарика.

*М.Семенов*

2. В «черном ящике» с тремя контактами находится схема, составленная из батареек с известной ЭДС  $E$ , двух неизвестных сопротивлений и соединительных проводов. Амперметр, подключенный к контактам 1 и 2, показывает ток  $I$ , к контактам 1 и 3 – ток  $2I$ , а к контактам 2 и 3 – отсутствие тока. Чему могут быть равны величины сопротивлений? Сопротив-

лением батареек, амперметра и соединительных проводов пренебречь.

*О.Шведов*

**10 класс**

1. Края симметричной относительно центра невесомой сетки из упругих нитей закреплены на неподвижном горизонтальном обруче (рис.6). В гори-

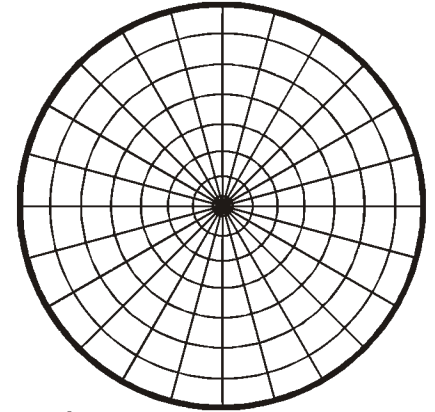


Рис. 6

зонтальном положении сетка не натянута. С какой высоты  $H$  гимнаст должен упасть без начальной скорости в центр сетки, чтобы ее максимальный прогиб оказался равным  $L$ , если под неподвижно лежащим в центре сетки гимнастом этот прогиб равен  $l$ ? Размеры гимнаста, величины  $L$  и  $l$  много меньше радиуса обруча. Известно, что при  $\epsilon \ll 1$  справедлива формула  $(1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon$ .

*Р.Компанец*

2. Два металлических шарика радиусом  $r$  помещены на большом расстоянии друг от друга в однородную среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и удельным сопротивлением  $\rho$ . Тонкими изолированными проводниками, общее сопротивление которых  $R$ , шарик подсоединены к идеальной батарее с ЭДС  $E$ . Определите установившийся заряд на одном из шариков. Сопротивлением шариков пренебречь.

*Р.Компанец*

**11 класс**

1. Тонкий невесомый диэлектрический стержень длиной  $l$  может свободно вращаться в горизонтальном положении вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. На концах стержня закреплены два маленьких шарика, имеющих каждый массу  $m$  и заряд  $q$ . Вся эта система помещена между цилиндрическими полюсами электромагнита, создающего однородное вертикальное магнитное поле с индукцией  $B_0$ . Диаметр полюсов равен  $d$  ( $d < l$ ), а их ось совпадает с осью

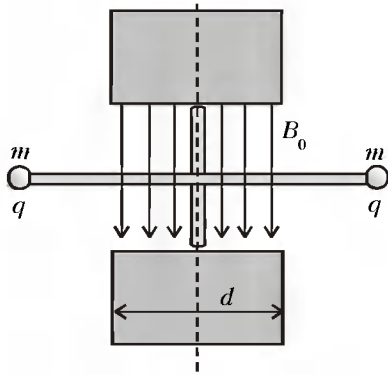


Рис. 7

вращения стержня (рис.7). Магнитное поле равномерно уменьшает до нулевого значения. Найдите угловую скорость, которую приобретет стержень

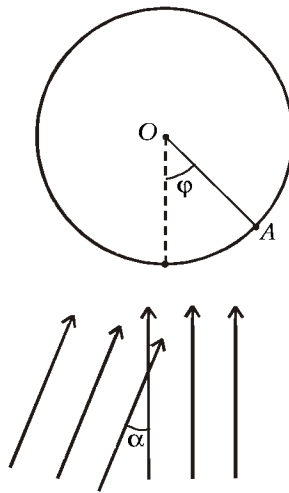


Рис. 8

жень после выключения магнитного поля. Считать, что поле было только между полюсами магнита.

*А.Якута*

2. Две плоские когерентные волны с одинаковой интенсивностью и длиной волны  $\lambda$  падают на цилиндрический экран. Угол между направлениями распространения волн равен  $\alpha$  (рис.8). Найдите расстояние между соседними интерференционными полосами вблизи точки А, считая, что оно много меньше радиуса цилиндра. Угол между направлением АО и направлением одной из плоских волн равен  $\varphi$ .

*О.Шведов*

*Публикацию подготовили  
М.Виноградов, М.Семенов, А.Якута*

# Итоги Межобластной заочной математической олимпиады

В середине прошлого 1998/99 учебного года (точнее – с декабря по февраль) Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством общего и профессионального образования РФ и при участии журнала «Квант» провела ставшую уже традиционной очередную Межобластную заочную математическую олимпиаду. К участию в олимпиаде через региональные органы образования были приглашены школьники 6–10 классов из 18 регионов России. (Информация о школе «АВАНГАРД» и об олимпиаде была опубликована в журнале «Квант» №5, 6 за 1998 г.) В олимпиаде приняли участие более десяти тысяч школьников России и стран СНГ. Следует отметить высокую активность и хороший уровень работ участников.

По итогам олимпиады дипломами первой степени награждены 28 школьников, причем среди них только один семиклассник (полный список награжденных и решения олимпиадных задач опубликованы в газете «Первое сентября»).

## **Абсолютными победителями олимпиады стали**

по 6 классам – *Шифрин А.*, г.Уфа, школа 93,

по 7 классам – *Томин Д.*, г.Иваново, школа-лицей «Гармония»,  
по 8 классам – *Засеев И.*, с.Бураево, Башкортостан,  
по 9 классам – *Новикова А.*, г.Воронеж, лицей 1,  
по 10 классам – *Скопенков М.*, г.Саратов, физико-технический лицей 1.

## **Интересные и оригинальные работы представили также**

по 6 классам – *Маянц А.*, г.Москва, школа 911 (ученик 5 класса),  
*Данько Я.*, г.Оленегорск Мурманской обл., школа 4,  
*Воробей Д.*, г.Калачинск Омской обл., школа 3,  
по 8 классам – *Арешин Я.*, г.Апатиты Мурманской обл., гимназия 1,  
*Сливенко А.*, г.Калачинск Омской обл., гимназия 4,  
по 9 классам – *Слонимский М.*, г.Лобня Московской обл., Лобнинский лицей,  
*Грустнев К.*, г.Полярные Зори Мурманской обл., школа 4,  
по 10 классам – *Дьяченко А.*, г.Шелехов Иркутской обл., школа 3,  
*Михайлова Н.*, г.Астрахань, школа 32,  
*Демченко М.*, г. Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Оргкомитет олимпиады поздравляет всех победителей и дипломантов олим-

пиады, особенно – Скопенкова Михаила (г.Саратов), трехкратного победителя олимпиады. Оргкомитет благодарит всех учителей, обеспечивших благоприятные условия для проведения олимпиады. Хотелось бы отметить высокую активность учащихся из Воронежской, Липецкой, Московской, Мурманской областей, а также Татарстана и Башкортостана.

Все абсолютные победители олимпиады награждаются комплектами журнала «Квант» за 1998 год. Двадцать школьников, приславших наиболее интересные и оригинальные решения и награжденные дипломами первой степени, по решению Оргкомитета приглашены на очередную Межгосударственную научно-практическую конференцию школьников. Дипломанты олимпиады, успешно окончившие 11 класс школы «АВАНГАРД», получают дополнительные льготы при поступлении в Московский инженерно-физический институт (технический университет).

*Адрес школы «АВАНГАРД»:  
115551 Москва, Ореховый б-р, д.11, кор.3.*

**IV Международная конференция памяти С.Н.Бернштейна**

3—8 февраля 1999 года в Санкт-Петербурге в Аничковом дворце прошла IV Международная конференция молодых ученых памяти С.Н.Бернштейна. Учредители конференции – математико-механический факультет Санкт-Петербургского государственного университета и лаборатория непрерывного математического образования городского Дворца творчества юных.

Доклады студентов и старшеклассников были заслушаны на секциях математического анализа, алгебры и теории чисел, геометрии, прикладной математики, информатики, физики, математического моделирования. Рецензентами и оппонентами работ стали известные петербургские математики – доктора физико-математических наук И.В.Романовский, Г.А.Леонов, И.С.Понизовский, М.П.Юшков, А.Г.Боголюбов, В.Н.Малоземов, С.И.Кублановский и др. Несмотря на свою молодость, многие из докладчиков представили содержательные исследования, выполненные либо на городском научном семинаре, либо сформулированные научным руководителем – профессором или доцентом университета. Некоторые из участников имеют научные публикации в отечественных и иностранных журналах и сборниках.

Главная премия в секции математики была присуждена *Дмитрию Парилкову* (Санкт-Петербург, Аничков лицей, 11 кл.) за доклад «Диффеоморфизмы счетных плотных подмножеств пространства  $R^n$ » – настоящую глубокую научную работу. Другие премии по секции математики получили *Алексей Ежиков* (Санкт-Петербург), *Андрей Корниенко* (Москва), *Андрей Примак* (Киев), *Дмитрий Каменецкий*, *Вениамин Моргенштерн* (Санкт-Петербург). Интересные доклады представили также *Сергей Мищенко*, *Дмитрий Филатов* и *Олег Богумирский*, *Александр Баранов*, *Максим Вольфсон*, *Юрий Сидоров*, *Павел Маннинен*, *Анна Григорьева*, *Павел Холькин*, *Андрей Аверин*, *Елена Петрова*, *Михаил Плискин*, *Игорь Барчевский* (все – Санкт-Петербург), *Станислав Булыгин*, *Дмитрий Ситников* (оба – Киев).

На секции физики были представлены доклады самых различных направлений: от сугубо теоретических до прикладных экспериментальных. В работе

петербуржца *Андрея Никитченко* изучен тонкий эффект взаимосвязи дисперсии вещества и поляризации волны, проходящей через него. Москвич *Антон Милехин* представил интересную работу по определению прочностных свойств цемента с использованием высокоточных методов ядерного магнитного резонанса, а петербуржец *Александр Курасов* рассчитал оптические характеристики вещества в рамках модели анизотропно-связанных осцилляторов. Оптическим методам была посвящена работа петербуржца *Юрия Бабаина*, в которой он рассмотрел оригинальную модель связи деформаций с показателями преломления.

На секции информатики наибольший интерес вызвал теоретический доклад *Михаила Плискина* из Санкт-Петербурга, в котором рассматривались возможности оптимизации существующей схемы построения программы и было представлено соответствующее программное обеспечение. Среди прикладных программ следует отметить работу учащихся петербургской физико-математической гимназии №30 *Николая Додонова*, *Евгения Жидкова*, *Ивана Ласакова*, *Родиона Орлова*, *Дмитрия Слещичева*, посвященную вопросам синтеза трехмерных изображений с использованием широкого спектра авторских алгоритмов. В работе учащихся Аничкова лица *Виктора Хабарова* и *Евгения Хорькова* были рассмотрены вопросы использования графики в кроссплатформенных программах на языке JAVA.

Студенческие работы также были чрезвычайно интересны. Следует отметить доклады *Дмитрия Митина* (Киевский университет), *Сергея Добрылина*, *Филиппа Шабанова*, *Александра Горбульского*, *Дмитрия Нурулина*, *Виктора Куницына* (все – Санкт-Петербургский университет), *Юрия Шеляженко*, *Андрея Бондаренко* (оба – Киевский университет). Но безусловно центральным был доклад студента математико-механического факультета СПбГУ *Владимира Камоцкого* «Об одном итерационном методе нахождения решения уравнения Гельмгольца». Научная специальность Владимира – математическая физика. Он сделал несколько докладов на научных семинарах в Оксфорде и Париже.

На пленарном заседании профессор В.Н.Малоземов в докладе «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля» рассказал об основных идеях конструктивной теории функций и отметил

роль академика Сергея Натановича Бернштейна в решении ряда задач. Докладчик не ограничился просто комментариями научных работ С.Н.Бернштейна, а рассказал о истории и проблематике этого научного направления, начиная с работ П.Л.Чебышёва.

Программа конференции не исчерпывалась докладами и сообщениями. Важной неформальной частью конференции была возможность общения математиков разных поколений: от старшеклассников и студентов до известных ученых. Значимость таких встреч очевидна.

В следующем году в феврале Оргкомитет планирует провести очередную V Международную конференцию молодых ученых памяти С.Н.Бернштейна. Для участия в ней приглашаются школьники и студенты младших курсов (возраст участников до 19 лет), занимающиеся в научных семинарах, школьных и студенческих математических кружках. Мы будем бесконечно признательны профессорам и преподавателям университетов и других высших и средних учебных заведений – научным руководителям студентов и школьников, откликнувшимся на наше приглашение.

Полный текст статей просьба высылать до 20 декабря по адресу:

191011 Санкт-Петербург, Невский пр., д.39, СПбГДТЮ, лаборатория непрерывного математического образования.

Тел.: (812)-310-13-13,  
факс: (812)-310-14-14.

Отбор и рецензирование статей осуществляет Экспертный совет конференции, на основании решения которого Оргкомитет высылает приглашения.

*И.Чистяков*



«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

(с.м. «Квант» №3)

1. Пусть первоначально на столе лежало  $N$  конфет, и пусть первые несколько (не уточняем, сколько именно) мальчиков взяли себе в общей сложности  $k$  конфет. Тогда на столе осталось  $(N - k)$  конфет. Сколько конфет получит очередной мальчик? Десятая часть остатка – это  $(N - k)/10$  конфет, и еще десятая часть того, что взяли себе предыдущие мальчики, – это  $k/10$  конфет. Всего это составляет  $(N - k)/10 + k/10 = N/10$  конфет.

Таким образом получается, что каждый мальчик независимо от очередности получил десятую часть всех конфет. Поскольку в один прекрасный момент конфеты кончились, то мальчиков было 10. Ну, а досталось всем поровну, и никто не в обиде.

2. Дедушка прав.

Если кастрюля удерживается на столе, сдвинем ее дальше от центра стола так, чтобы центр тяжести кастрюли в точности приходился на край стола. Очевидно, что и в этом случае кастрюля еще удержится на столе. На рисунке 1 показано, что центр кастрюли находится в вершине правильного шести-

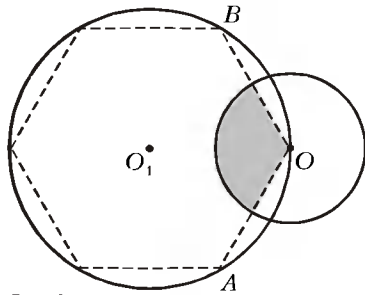


Рис. 1

угольника, вписанного в границу круглого стола. Так как радиус стола  $O_1O$  равен длине отрезков  $OA$  и  $OB$ , а диаметр кастрюли меньше диаметра стола, то край кастрюли пересекает оба эти отрезка. Сектор, высекаемый этими отрезками на дне кастрюли, по площади в точности равен  $1/3$  площади дна.

Можно сделать вывод,

что в крайнем положении, когда кастрюля еще удержится на столе, она соприкасается с плоскостью стола по площади, большей  $1/3$  площади своего дна. Значит, если бабушка поставит кастрюлю так, как она хочет, то кастрюля на столе не удержится.

3. Можно. Сто первых натуральных чисел распадаются на 50 пар так, что в каждой паре сумма чисел равна 101. Пусть среди 25 зачеркнутых чисел нашлось  $k$  полных пар, а остальные  $25 - 2k$  из них присутствуют без парных. К этим непарным  $25 - 2k$  числам добавим  $25 - 2k$  чисел, дополнительных к каждому из них до пары, и зачеркнем их. Еще зачеркнем  $k$  пар чисел среди незачеркнутых – получим всего 25 полных пар чисел, что составляет половину суммы всех натуральных чисел от 1 до 100.

4. В послании зашифрована фраза: «Жил-был у бабушки серенький козлик...».

5. Если царь – лжец, а все его подданные – рыцари, гибельной могла оказаться фраза «Царь – рыцарь». Передавая ее из уст в уста, рыцари гибнут, последний же перед смертью повторяет ее царю.

Предположим, что царь на самом деле рыцарь. Если бы к тому же все его подданные были рыцарями, то все они говорили бы друг другу только правду, и никаких катаклизмов в государстве не произошло бы. Покажем, что если среди подданных имеется один лжец, то ситуация, описанная в условии задачи, реализуется. Если царь скажет лжецу: «В государстве имеется один лжец», то после произнесения этой фразы лжецом тот станет рыцарем, а сама фраза – ложной. Далее схема гибели повторяет предыдущую.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(с.м. «Квант» №1)

16. Поскольку в натуральном ряду числа, кратные 2, встречаются чаще, чем кратные 5, то число нулей, которыми оканчивается факториал  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ , равно количеству пятерок в разложении  $n!$  на простые множители.

Пусть  $n!$  – наименьший из факториалов, оканчивающийся ровно  $m$  нулями. Тогда  $n$  делится на 5 (в противном случае еще меньший факториал  $(n - 1)!$  оканчивался бы таким же количеством нулей). Заметим, что если  $n$  делится на 5, но не делится на  $5^2 = 25$ , то разложение числа  $(n - 1)!$  на простые множители содержало бы на одну пятерку меньше, и потому число  $(n - 1)!$  оканчивалось бы ровно  $m - 1$  нулями, что противоречит условию. Итак,  $n$  делится на 25. Но тогда число  $n + 5$  не делится на 25, хотя делится на 5, и, следовательно, в разложении числа  $(n + 5)!$  на простые множители содержится на одну пятерку больше, чем в разложении  $n!$ . Следовательно, факториал, оканчивающийся  $m + 1$  нулями, существует.

17. Из равенства  $x_2 + y_2 + z_2 = x_1 + x_2 + x_3$  выразим переменную  $z_2$  через остальные переменные:  $z_2 = x_1 + x_3 - y_2$ . Аналогично, из равенства  $y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + y_1 + z_1$  выразим переменную  $y_3 = x_1 + z_1 - y_2$ ; из равенства  $y_1 + y_2 + y_3 = x_3 + y_3 + z_3$  выразим переменную  $y_1 = x_3 + z_3 - y_2$ , а из равенства  $x_2 + y_2 + z_2 = z_1 + z_2 + z_3$  – переменную  $x_2 = z_1 + z_3 - y_2$ . Воспользовавшись этими выражениями, получаем

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 + y_1 y_2 y_3 + z_1 z_2 z_3 &= x_1 (z_1 + z_3 - y_2) x_3 + \\ &+ (x_3 + z_3 - y_2) y_2 (x_1 + z_1 - y_2) + z_1 (x_1 + x_3 - y_2) z_3 = \\ &= x_1 z_1 x_3 + x_1 z_3 x_3 - x_1 y_2 x_3 + x_3 y_2 x_1 - x_3 y_2^2 + x_3 y_2 z_1 + \\ &+ z_3 y_2 x_1 - z_3 y_3^2 + z_3 y_2 z_1 - y_2^2 x_1 + y_2^3 - \\ &- y_2^2 z_1 + z_1 x_1 z_3 + z_1 x_3 z_3 - z_1 y_2 z_3 = x_1 (x_3 + z_3 - y_2) z_1 + \\ &+ (z_1 + z_3 - y_2) y_2 (x_1 + x_3 - y_2) + \\ &+ x_3 (x_1 - y_2 + z_1) z_3 = x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2 + x_3 y_3 z_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18. \sqrt{5} - \frac{a}{b} > 0 &\Rightarrow 5b^2 > a^2 \Rightarrow 5b^2 \geq a^2 + 1 = \\ &= a^2 + 2a \cdot \frac{1}{4a} + \frac{1}{4} > a^2 + 2a \cdot \frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} = \\ &= \left(a + \frac{1}{4a}\right)^2 \Rightarrow 5 > \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{4ab}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{5} - \frac{a}{b} > \frac{1}{4ab}. \end{aligned}$$

19. Обезьянка Чита, начиная вытаскивать орехи первой, при правильной стратегии Чи-Чи получит меньшую добычу. Чи-Чи, например, может действовать так.

Если Чита первым ходом вытаскивает 1 орех, Чи-Чи следом вытаскивает 12 орехов и в дальнейшем обеспечивает себе победу (большее количество орехов). Если Чита первым ходом вытаскивает 5 орехов, то Чи-Чи следующим ходом вытаскивает один орех. Поскольку после этого в куче останется 19 орехов, то Чита следующим ходом сможет вытащить только один орех, зато Чи-Чи следом – 9. На данном этапе у Читы 6 орехов, у Чи-Чи – 10, в куче осталось 9. Если далее Чита вытаскивает 3 ореха, то Чи-Чи – тоже 3 ореха, если же Чита вытаскивает 1 орех, то Чи-Чи – 4 ореха. В любом из этих двух случаев Чи-Чи обеспечивает себе победу.

20. Угол  $\angle C_1 A_1 B_1$  дополняет углы  $\angle C_1 A_1 B$  и  $\angle B_1 A_1 C$  до развернутого угла, поэтому он равен углу  $\angle C_1 A B_1$ , который вместе с углами  $\angle A C_1 B_1 = \angle B_1 A_1 C$  и  $\angle C_1 B_1 A = \angle C_1 A_1 B$  состав-

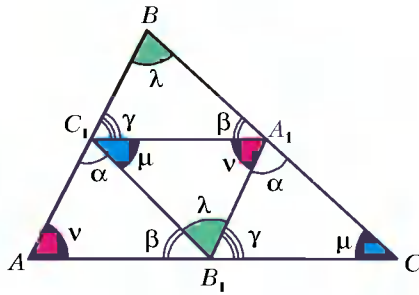


Рис. 2

ляет объединение внутренних углов треугольника  $AC_1B_1$ . Аналогично  $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$ ;  $\angle C_1B_1A_1 = \angle C_1BA_1$ . Привлекая эти факты, а также условие задачи, введем обозначения углов, как показано на рисунке 2. Из равенства сумм внутренних углов

треугольников  $AC_1B_1$  и  $ABC$  получаем

$$\alpha + \beta = \lambda + \mu. \quad (1)$$

Сравнивая сумму углов треугольника  $ABC$  с аналогичными суммами углов треугольников  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$ , получаем

$$\beta + \gamma = \mu + \nu, \quad (2)$$

$$\alpha + \gamma = \lambda + \nu. \quad (3)$$

Складывая равенства (1), (2), (3) и учитывая, что  $\lambda + \mu + \nu = 180^\circ$ , отсюда выводим  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Сравнивая последнее равенство с каждым из равенств

$$\alpha + \beta + \nu = 180^\circ, \quad \alpha + \gamma + \mu = 180^\circ, \quad \beta + \gamma + \lambda = 180^\circ,$$

выражающих суммы внутренних углов соответствующих треугольников, получаем  $\alpha = \lambda$ ,  $\beta = \mu$ ,  $\gamma = \nu$ .

Следовательно,  $A_1B_1 \parallel AB$ ;  $A_1C_1 \parallel AC$ ;  $B_1C_1 \parallel BC$ . В параллелограммах  $AC_1A_1B_1$ ,  $B_1C_1A_1C$  противоположные стороны равны:  $AB_1 = C_1A_1$ ;  $B_1C = C_1A_1$ , отсюда  $AB_1 = B_1C$ , т.е. точка  $B$  — середина стороны  $AC$ . Аналогично доказывается, что точка  $A_1$  — середина стороны  $BC$ , а точка  $C_1$  — середина стороны  $AB$ .

### Очень важный вопрос

Если  $t$  — время от начала движения до первой встречи Винни-Пуха и Пятачка, то, обозначив через  $a$  расстояние между их домами и через  $x$  путь, пройденный Винни-Пухом, получим, что Винни-Пух шел со скоростью  $x/t$ , а Пятачок — со скоростью  $(a-x)/t$ . Оставшийся путь  $(a-x)$  Винни-Пух прошел за 1 минуту, т.е. его скорость равнялась  $(a-x)/1$ , а Пятачок прошел оставшийся путь длиной  $x$  за 4 минуты и его скорость составила  $x/4$ . Но так как их скорости не изменились, то  $\frac{x}{t} = \frac{a-x}{1}$  и  $\frac{a-x}{t} = \frac{x}{4}$ , или  $\frac{x}{a-x} = \frac{t}{1}$  и  $\frac{x}{a-x} = \frac{t}{4}$ . Так как левые части этих уравнений равны, то равны и

правые:  $\frac{t}{1} = \frac{4}{t}$ . Отсюда  $t^2 = 4$ ,  $t = 2$ . Итак, до встречи Винни-Пух и Пятачок шли 2 минуты; значит, всего Винни-Пух шел 3 минуты, а Пятачок — 6 минут.

### Несколько задач для 11-классников

#### Вариант 1

1. а)  $a = 8$ ,  $x = \sqrt{5} - 2$ . б)  $\left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup [2; +\infty)$ . в)  $a < 0$ ;  $a = \frac{27}{4}$ .

Указание. Постройте график функции  $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x}$  при  $x > -1$ . г) Наименьшее значение функции  $f(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{x}$

на луче  $(0; +\infty)$  равно  $n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > ne$ .

2. а)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . б)  $[0; 2] \cup [2n-1; 2n]$ , где  $n \geq 2$  или

$n \leq -1$  (случаи  $a = 0; \pm 1$  надо рассмотреть отдельно). в)  $\frac{\pi}{4}$ .

Указание. Воспользуйтесь тем, что  $f(x) \leq \sin x < \cos x$  при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{5}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Поскольку множитель  $\sin ax$  не должен

обращаться в нуль на отрезке  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ , то  $|a| < 4$ . Теперь

оценки  $1 \leq a \leq \frac{5}{3}$  следуют из того, что исходное неравенство должно быть верным при  $x = \frac{\pi}{4}$  и  $x = \frac{\pi}{2}$ . Осталось показать,

что для любого  $a \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$  неравенство  $\sin ax \sin x \geq \frac{1}{2}$  верно

для всех  $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ , что требует дополнительного рассуждения, в котором полезно использовать то, что функция  $y = 2(2z^2 - 1)^2$  — выпуклая.

3А. а) Два корня. Указание. Покажите, что функция  $f(x) = ax^{1998} - cx^{1917} + b - d$  имеет не более одной точки экстремума. б)  $x = 1$ . в)  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $d = 0$ . Указание. Пусть  $an^{1998} =$

$s(n)(n^{1917} + d)$ , где  $s(n)$  — целое. Ясно, что  $s(n) \leq Mn^{81}$ . Перейдем теперь к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в равенстве  $an^{81} - s(n) = ds(n)n^{-1917}$ . Число, стоящее в его левой части — целое, между тем его правая часть стремится к нулю. Значит,  $d = 0$ .

г)  $(a, b, c) = (71k, 3k, 74k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  (см. задачу 8 в статье).

3Б. См. задачу 7 в статье.

3В. а)  $-1, -i, 1 + i$ . б)  $b = 0$ ,  $a$  — любое. Указание. Проще всего воспользоваться формулами Виета. в)  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ .

Указание. Так как  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , то из условия, что эти числа лежат в вершинах равностороннего треугольника, следует, что они являются корнями уравнения  $z^3 = b_1$ . Следовательно, они суть и корни уравнения  $az + b + b_1 = 0$ , которое тем самым имеет по крайней мере три различных корня. г) Указание. Пусть  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Тогда

$$\begin{aligned} |p(z)|^2 &= 1 + |a|^2 + |b|^2 + (a_1 \cos 2\varphi + a_2 \sin 2\varphi) + \\ &+ (b_1 \cos 3\varphi + b_2 \sin 3\varphi) + (\bar{a}bz + \bar{a}b\bar{z}) \geq \\ &\geq 1 + (a_1 \cos 2\varphi + a_2 \sin 2\varphi) + (b_1 \cos 3\varphi + b_2 \sin 3\varphi). \end{aligned}$$

Осталось показать, что если  $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ , то найдется такое решение системы неравенств

$$\begin{cases} a_1 \cos 2\varphi + a_2 \sin 2\varphi \geq 0, \\ b_1 \cos 3\varphi + b_2 \sin 3\varphi \geq 0, \end{cases}$$

на котором одно из неравенств системы является строгим.

#### Вариант 2

1. б)  $\frac{1}{4}\sqrt{3}$  (см. решение задачи 2 в статье). в) Указание.

Так как  $D_1 + D_2 = p_1^2 - 4q_1 +$

$+ p_2^2 - 4q_2 \geq 2p_1p_2 - 4(q_1 + q_2) = 0$ , то хотя бы один из дискриминантов неотрицателен.

2. а) См. рис. 3. Функция  $y = \log_2 x + 2x$  — возрастающая и ее нуль —  $x = \frac{1}{2}$ .

б)  $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ;  $\pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

в) См. задачу 5 в статье. г) Да, достаточно (см. задачу 3 в статье).

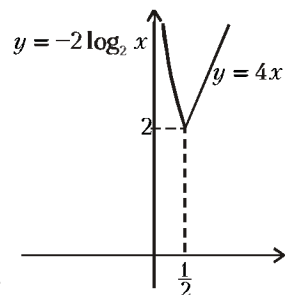


Рис. 3

3. а) *Указание.* Нетрудно видеть, что данное равенство равносильно тому, что

$$\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

б) *Указание.* Искомое множество есть объединение биссектрис координатных углов. в)  $\frac{\pi}{2}$ . *Указание.* Докажите по индукции, что сумма первых  $n$  слагаемых в данной бесконечной сумме равна  $\arctg n$ .

4. а, б)  $\frac{1}{12}\sqrt{3}$ . *Указание.* Учтите, что имеются два различных варианта расположения единичных ребер! в) См. задачу 6 в статье.

**Разные задачи**

1. а)  $(x, y) = (1998, 0); (0, 1998); (888, 222); (222, 888)$ .

*Указание.* Из равенства  $\sqrt{y} = \sqrt{1998} - \sqrt{x}$  получаем, что  $y = 1998 + x - 2\sqrt{1998x}$ , откуда следует, что число  $1998x$  должно быть полным квадратом. б)  $(x, y, z) = (222, 222, 222)$ . *Указание.* Докажите вначале следующее утверждение.

*Лемма.* Если  $a, b, u, v \in \mathbb{N}$  и  $a\sqrt{u} + b\sqrt{v} \in \mathbb{N}$ , то  $\sqrt{u}, \sqrt{v} \in \mathbb{N}$ .

2. а) Только равносторонние треугольники. б) *Указание.* Решение очевидно, если использовать такое «геометрически очевидное» утверждение. Если  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  и  $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq a_n$ ,

то существует замкнутая выпуклая ломаная, длины звеньев которой равны  $a_i$ . Попробуйте дать какое-нибудь обоснование этого утверждения. в) Квадраты и только

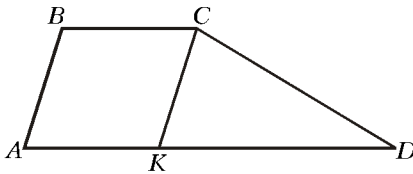


Рис. 4

они. *Указание.* Нетрудно видеть, что если углы четырехугольника образуют арифметическую прогрессию, то он – трапеция. Далее, если и длины его сторон образуют арифметическую прогрессию, то  $KD = |CD - CK|$  (обозначения на рисунке 4, отрезок  $CK$  параллелен стороне  $AB$ ), откуда следует, что  $K = D$ , т.е. этот четырехугольник является прямоугольником.

**Задачи с проводящими сферами**

1.  $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ ; уменьшится на  $\Delta W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}$ .

2.  $q_1 = -q \frac{R_2 - 1}{R_1}$ ,  $q_2 = -q \frac{1 - R_1}{R_2}$ .

3.  $Q = -q \frac{R}{l}$  при  $l > R$ .  $Q = -q$  при  $l < R$ .

4.  $Q = - \left( q_1 + q_2 \frac{R}{l_2} \right)$ . 5.  $Q_R = -\frac{q}{4}$ ,  $Q_{3R} = \frac{q}{4}$ .

**LXII Московская математическая олимпиада**

**ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА**

6 класс

1. *Ответ:* изначально было отмечено 15 точек. Если (до уплотнения) было отмечено  $n$  точек, то после уплотнения будет отмечено  $2n - 1$  точек (из которых  $n$  старых и  $n - 1$  новая).

Следовательно, число точек до уплотнения можно найти, прибавив к числу точек после уплотнения единицу и поделив пополам. Таким образом, до последнего уплотнения было  $(113 + 1)/2 = 57$  точек, до второго  $-(57 + 1)/2 = 29$  точек и в самом начале  $-(29 + 1)/2 = 15$  точек.

2. Для начала разложим 420 на множители:

$$420 = 6 \cdot 7 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Теперь уже несложно сгруппировать эти множители в пять групп так, чтобы в сумме получилось 20:

$$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 420; 7 + 5 + 3 + 4 + 1 = 20.$$

3. Заметим для начала, что белых клеток должно быть втрое больше черных, так что белых будет 12, а черных – 4. После этого легко нарисовать требуемую картинку (рис.5).

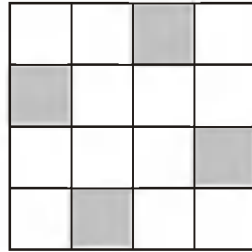


Рис. 5

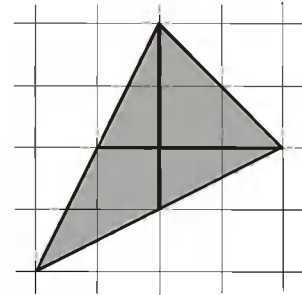


Рис. 6

4. Вертолет летит на юг по московскому меридиану, затем по параллели, потом снова по меридиану на север, а затем по более северной параллели. Так как все меридианы одинаковы, широта вертолета не изменится (сколько градусов он пролетел на юг, столько же он пролетит и на север). А параллели разные: чем севернее, тем короче, так что на северной параллели те же 300 км составят большее число градусов. Значит, вертолет окажется восточнее Москвы на той же широте.

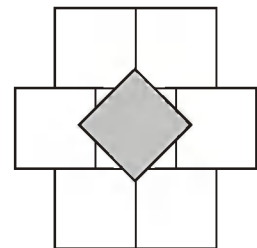


Рис. 7

5. Удобно сначала нарисовать перпендикулярные медианы треугольника, а потом уже вершины. На рисунке 6 показан один из возможных вариантов.

6. См. рис.7.

7 класс

1. *Ответ:* 25/76. Сумма числителя и знаменателя равна 101. Значит, чем больше числитель дроби, тем меньше ее знаменатель – и тем больше сама дробь. Видно, что 25/76 еще меньше 1/3, а 26/75 – уже больше.

2. См. рис.8.

4. *Ответ:* рассвет был в 6 часов утра.

6. См. задачу 4 раздела «Квант» для младших школьников» в этом номере журнала.

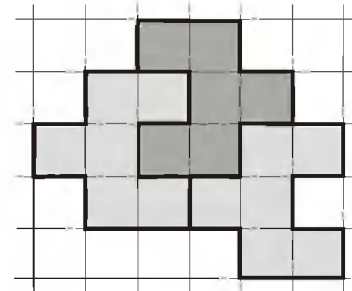


Рис. 8

8 класс

1. Рассмотрим числа

$$1 - x = \frac{1}{111111}, 1 - y = \frac{2}{222223}, 1 - z = \frac{3}{333334}$$



а также обратные к ним

$$\frac{1}{1-x} = 111111, \frac{1}{1-y} = 111111\frac{1}{2}, \frac{1}{1-z} = 111111\frac{1}{3}.$$

Мы видим, что  $\frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-z} < \frac{1}{1-y}$ . Поскольку все рас-

сматриваемые числа положительны,  $1-x > 1-z > 1-y$ .

Следовательно,  $x < z < y$ .

2. См. задачу М1691 «Задачника «Кванта».

3. Предположим, что  $ab = cd$ . Тогда

$$a^2 + 2cd + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, \\ c^2 + 2ab + d^2 = c^2 + 2cd + d^2 = (c+d)^2.$$

Таким образом, достаточно найти четыре различных натуральных числа  $a, b, c$  и  $d$ , для которых  $ab = cd$ . Для этого найдем число  $n$ , разлагающееся в произведение двух множителей различными способами. Например, таким числом является  $n = 6$ ; в этом случае можно взять  $a = 1, b = 6, c = 2, d = 3$ .

4. Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам. Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, — это 498.

Докажем, что снять 498 долларов возможно. Произведем следующие операции:  $500 - 300 = 200, 200 + 198 = 398, 398 - 300 = 98, 98 + 198 = 296, 296 + 198 = 494$ . Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова

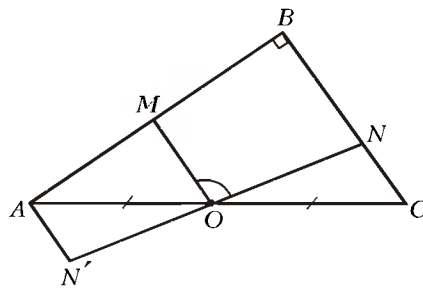


Рис. 9

снять 300. В результате у него будет 498 долларов.  
5. Рассмотрим поворот на  $180^\circ$  по часовой стрелке вокруг центра  $O$  (рис.9). При этом повороте треугольник  $ONC$  перейдет в треугольник  $ON'A$ . Рассмотрим четырех-

угольник  $MAN'O$ ; в нем углы  $MAN'$  и  $MON'$  прямые. В самом деле,  $\angle MAN' = \angle BAC + \angle BCA$ , а  $\angle MON' = \angle MOA + \angle NOC = 180^\circ - \angle MON$ . Следовательно,  $MN'^2 = AM^2 + AN'^2 = OM^2 + ON'^2$ . Далее,  $ON' = ON, OM^2 + ON^2 = MN^2$ . С другой стороны,  $AN' = CN$  — и требуемое равенство доказано.

6. Всего в турнире были сыграны  $n(n-1)$  партий, и в каждой разыгрывалось 1 очко. Поэтому при равенстве всех результатов участники набрали по  $n-1$  очку. Каждый шахматист сыграл белыми  $n-1$  партию, и количество выигранных им партий белыми равно одному из  $n$  чисел:  $0, \dots, n-1$ . Предположим, что утверждение задачи неверно: все выиграли разное число партий белыми. Тогда реализованы все возможные варианты от 0 до  $n-1$ . Рассмотрим двух участников турнира:  $A$ , выигравшего  $n-1$  партию белыми, и  $B$ , не выигравшего ни одной такой партии. Разберемся, каким мог быть результат партии, которую  $A$  играл против  $B$  черными. С одной стороны,  $A$  набрал  $n-1$  очко, играя белыми, так что все свои партии черными, в том числе и эту, он должен был проиграть. Но  $B$  не выиграл белыми ни одной партии, значит, не мог выиграть и эту. Противоречие.

9 класс

1. Произведение чисел на доске не меняется. Действительно,  $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = ab$ . Поэтому искомое произведение равно 2.

2. Ответ: да. Приведем стратегию второго игрока. Первые 1000 ходов он пропускает. Ход с номером  $n > 1000$  он делает так:

1) если на  $n$ -м и  $(2000 - n)$ -м местах стоят одинаковые буквы — ничего не делает;

2) если на этих местах — разные буквы, то одна из них не совпадает с той, которая стоит на 1000-м месте. Второй игрок меняет ее с 1000-й буквой.

3. См. задачу М1677 «Задачника «Кванта».

4. Ответ:  $k = 2$ .

Обозначим  $n = 1000$ . Имеем два случая:

1)  $k > 1000$ . Тогда

$$\frac{1 \dots 12 \dots 2}{2n} - \frac{2 \dots 2}{n+1} = 10^{n+1} \cdot \frac{1 \dots 1 \ 2 \dots 2}{2n-k-(n+1)}.$$

Очевидно, что это число не является квадратом натурально-го:  $n$  четно, поэтому в разложение числа входит нечетное число пятерок.

2)  $k \leq 1000$ . Тогда

$$\frac{1 \dots 12 \dots 2}{2n} - \frac{2 \dots 2}{n+1} = \frac{1 \dots 10 \dots 0}{2n-k} - \frac{2 \dots 20 \dots 0}{n+1-k} = 10^k \left( \frac{1 \dots 1}{2n-k} - \frac{2 \dots 2}{n+1-k} \right).$$

Получили:  $k = 2l$ , и достаточно найти все такие  $l < n$ , что число  $A = \frac{1 \dots 1}{2n-2l} - \frac{2 \dots 2}{n+1-2l}$  — полный квадрат.

Заметим, что число  $x$  является полным квадратом в точности тогда, когда и  $9x$ . Имеем:

$$9A = \frac{9 \dots 9}{2n-2l} - \frac{19 \dots 98}{n-2l} = \frac{9 \dots 980 \dots 01}{\frac{n-2l}{9}}.$$

«Близкий» к числу  $9A$  полный квадрат — число  $B = (10^{n-l})^2$ .

Очевидно,  $B > 9A$ . Очевидно также, что при  $Y > Z$  будет  $Y^2 - Z^2 \geq Y^2 - (Y-1)^2 = 2Y - 1$ . А теперь найдем разность  $B - 9A$ :

$$10^{2n-2l} - 9 \dots 980 \dots 01 = \frac{19 \dots 9}{n-2l+1} = 2 \cdot 10^{n-2l+1} - 1.$$

Ясно, что  $2 \cdot 10^{n-2l+1} - 1 \leq 2 \cdot 10^{n-l} - 1$ , причем равенство имеет место в точности при  $l = 1$ , откуда сразу и получается ответ задачи.

5. Будем считать, что  $R$  лежит на  $AC, S$  — на  $BC$ . Тогда

$$RQ = RC - QC = \frac{b}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-a}{2}.$$

Поскольку треугольники  $AQP$  и  $RQT$  подобны, а треугольник  $AQP$  равнобедренный, то  $RQ = RT$ . Следовательно,

$$ST = RS - RT = RS - RQ = \frac{c}{2} - \frac{c-a}{2} = \frac{a}{2} = BS.$$

Отсюда треугольник  $TSB$  равнобедренный и  $\angle SBT = \angle STB = \angle TBA$ , а  $BT$  — биссектриса угла  $B$  треугольника  $ABC$ .

6. б) Укажем для каждого вида соревнования спортсмена, который выбывает в этом виде, и назовем его «отмеченным». Построение индуктивное.

Для первого вида соревнования — это самый слабый в первом виде:  $a_1$ . Обозначим  $A_1 = \{a_1\}$ .

Пусть уже построено множество  $A_k = \{a_1, \dots, a_k\}$  спортсменов такое, что  $a_i$  выбывает в  $i$ -м виде соревнования. Обозначим через  $a_{k+1}$  спортсмена, который в  $(k+1)$ -м виде соревнования слабее всех спортсменов, не входящих в множество  $A_k = \{a_1, \dots, a_k\}$ . Докажем, что  $a_{k+1}$  выбывает при любом порядке соревнований не позднее  $(k+1)$ -го вида соревнования.

Для доказательства опять прибегнем к индукции. Пусть соревнование при новом порядке соревнований проводится первым. Поскольку при любом натуральном  $k$  будет  $2^{k-1} \geq k$ , то «отмеченный» в этом соревновании спортсмен попадает в более слабую половину его участников и выбывает.

Пусть при всех  $m > s \geq 0$  «привязанные» к соревнованиям с новыми номерами  $n - m$  спортсмены выбывают не позднее этих соревнований. Рассмотрим соревнование с новым номером  $n - s$ . По предположению индукции, к этому соревнованию уехали не более  $s + 1$  «отмеченных» спортсменов. С другой стороны,  $2^s$  самых слабых участников этого вида соревнования выбывают в результате его проведения. Поскольку  $2^s \geq s + 1$ , то «отмеченный» в этом соревновании спортсмен, если он при новом порядке до этого соревнования и дожил, попадает в более слабую половину и выбывает.

в) Пример построим по индукции. Пусть есть  $n$  видов соревнований, перенумерованных числами от 1 до  $n$ . Возьмем две группы  $A$  и  $B$  по  $2^{n-1}$  спортсменов такие, что группа  $B$  дает пример соревнования в видах соревнований с 1-го по  $(n - 1)$ -й с  $2^{n-1} - n + 1$  возможными победителями. (Такое возможно по предположению индукции.) Пусть в этих  $n - 1$  видах любой спортсмен из  $A$  сильнее любого из  $B$ , а в  $n$ -м виде соревнования любой спортсмен из  $B$  сильнее любого из  $A$ .

Если провести  $n$ -й вид соревнований первым, то останутся только спортсмены из  $B$ , из которых перестановками остальных видов соревнований можно  $2^{n-1} - n + 1$  спортсменов сделать победителями.

В противном случае, т.е. после любого иного первого тура, останутся только спортсмены из группы  $A$ , которые будут соревноваться далее в каких-либо  $n - 1$  из  $n$  видов соревнований. Докажем (опять по индукции), что в таких условиях можно сделать победителями  $2^{n-1} - 1$  спортсменов, причем есть такой порядок соревнований, при котором единственный аутсайдер (не «возможный победитель») выходит в финал. (\*)

База очевидна:  $n = 2$ . Пусть есть пример  $n$  соревнований с  $2^{n-1}$  участниками, удовлетворяющий (\*).

Опять берем две группы по  $2^{n-1}$  спортсменов, при этом любой спортсмен из  $A$  сильнее любого из  $B$  в соревнованиях с 1-го до  $n$ -го, а в  $(n + 1)$ -м – наоборот. Соревнования с 1-го по  $n$ -е организуем так, чтобы и в группе  $A$ , и в группе  $B$  можно было сделать победителями по  $2^{n-1} - 1$  спортсменов. Единственный аутсайдер в  $A$  – самый сильный в  $(n + 1)$ -м виде соревнования. Проводя первым  $(n + 1)$ -й вид соревнований, получим  $2^{n-1} - 1$  возможных победителей из  $B$ , причем при некотором порядке соревнований аутсайдер выйдет в финал (по индуктивному предположению). Если вообще не проводить  $(n + 1)$ -й вид соревнования, то в первом туре (каков бы он ни был) вылетают все из  $B$ , а далее можно сделать победителями  $2^{n-1} - 1$  из  $A$ . Осталось объяснить, как сделать победителем аутсайдера в  $A$ . Для этого мы первым проводим тот вид соревнования, который является финальным при порядке, обеспечивающем выход аутсайдера в финал. После этого остались только спортсмены из  $A$ . Далее проводим соревнования в таком порядке, который обеспечивает выход аутсайдера из  $A$  в финал, а завершаем  $(n + 1)$ -м видом соревнования. В нем аутсайдер побеждает.

10 класс

1. Рассмотрим квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + bx + ac$ . Из условия следует, что  $f(c) = c^2 + bc + ac = (a + b + c)c < 0$ . В точке  $c$  функция  $f(x)$  принимает отрицательное значение, следовательно, парабола  $y = f(x)$  пересекает ось  $Ox$  в двух точках, т.е. имеет два различных корня. Значит, дискриминант этого квадратного трехчлена положителен:  $b^2 - 4ac > 0$ .

2. См. задачу М1693 «Задачника «Кванта».

3. Ответ: (1, 1).

Докажем вначале, что  $x$  и  $y$  взаимно просты. Предположим противное. Тогда  $x$  и  $y$  делятся на некоторое простое число  $p$ : пусть  $p$  входит в разложение на простые множители чисел  $x$  и  $y$  соответственно в степенях  $a \geq 1$  и  $b \geq 1$ , положим для определенности  $a \geq b$ . Тогда максимальная степень  $p$ , на которую делится  $x^3 + y$ , равна  $b$  (поскольку  $x^3$  делится на  $p^{3a}$

и тем более на  $p^{b+1}$ , а  $y$  делится на  $p^b$  и не делится на  $p^{b+1}$ ). Но  $x^2 + y^2$  делится на  $p^{2b}$ , следовательно,  $x^3 + y$  не может делиться на  $x^2 + y^2$ . Это противоречие доказывает, что  $x$  и  $y$  взаимно просты.

Далее, из условия следует, что число  $(x^2 + y^2) - (x^3 + y) = y(xy - 1)$  делится на  $x^2 + y^2$ . Заметим, что  $y$  и  $x^2 + y^2$  не имеют общего множителя, большего 1 (так как  $x$  и  $y$  взаимно просты), значит,  $xy - 1$  делится на  $x^2 + y^2$ . Но если  $xy > 1$ , то это невозможно, так как  $x^2 + y^2 \geq 2xy > xy - 1$ .

4. См. задачу М1684 «Задачника «Кванта».

5. Пусть  $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ ,  $f(x) = x/\sqrt{3}$  и  $g: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ ,  $g(x) = 1 - (1 - x)/\sqrt{3}$  – функции, отвечающие прыжкам кузнечика. Область значений  $f$  – отрезок  $[0; 1/\sqrt{3}]$ , область значений  $g$  – отрезок  $[1 - 1/\sqrt{3}; 1]$ . Каждый из этих отрезков имеет длину  $1/\sqrt{3}$ , и вместе они покрывают отрезок  $[0; 1]$ .

Пусть  $n$  – некоторое натуральное число. Рассмотрим всевозможные функции  $h_1(h_2(\dots(h_n(x))\dots))$ :  $[0; 1] \rightarrow [0; 1]$ , где каждая функция  $h_i$  – либо  $f$ , либо  $g$ . Легко видеть, что область значений каждой из этих функций есть отрезок длины  $(1/\sqrt{3})^n$ . Докажем индукцией по  $n$ , что эти отрезки покрывают отрезок  $[0; 1]$ . Для  $n = 1$  это утверждение уже проверено.

Предположим, что области значений всевозможных функций  $h_1(h_2(\dots(h_{k-1}(x))\dots))$  покрывают отрезок  $[0; 1]$ . Фиксируем любую из функций  $h_1(h_2(\dots(h_{k-1}(x))\dots))$ . Область значений этой функции покрывается областями значений функций  $h_1(h_2(\dots(h_{k-1}(f(x))\dots))\dots)$  и  $h_1(h_2(\dots(h_{k-1}(g(x))\dots))\dots)$ . Тем самым утверждение доказано.

Пусть теперь на отрезке  $[0; 1]$  выбрана точка  $a$ . Рассмотрим интервал  $(a - 0,01; a + 0,01)$  и покажем, что кузнечик сможет в него попасть. Выберем  $n$  столь большим, чтобы было выполнено неравенство  $(1/\sqrt{3})^n < 0,01$ . По доказанному,

можно выбрать такую функцию  $h_1(h_2(\dots(h_n(x))\dots))$ , что точка  $a$  принадлежит области ее значений. Тогда вся область значений рассматриваемой функции (отрезок длины  $(1/\sqrt{3})^n$ ) лежит внутри интервала  $(a - 0,01; a + 0,01)$ . Это означает, что из любой точки отрезка  $[0; 1]$  кузнечик попадет внутрь интервала  $(a - 0,01; a + 0,01)$ , выполнив последовательно прыжки, соответствующие функциям  $h_n, h_{n-1}, \dots, h_1$ .

6. Ответ: расстановка на рисунке 10 (или получающаяся из нее поворотом либо осевой симметрией).

Лемма. Пусть по окружности расставлены 1999 различных положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{1999}$  и пусть  $a_i > a_{1998-i}$ . Рассмотрим следующую операцию: числа  $a_i$  и  $a_{1999-i}$ , где  $i = 1, 2, \dots, 999$ , меняем местами, если  $a_i <$

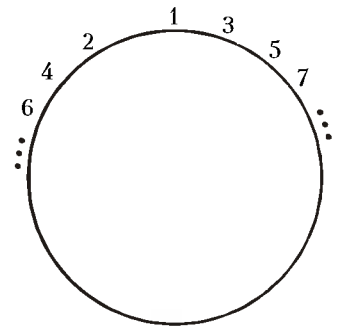


Рис. 10

$< a_{1999-i}$ , и не меняем в противном случае. Если хотя бы одна пара чисел поменялась местами, то сумма произведений десятков чисел, идущих подряд, увеличилась.

Доказательство леммы. Рассмотрим симметричные группы по 10 чисел  $a_i, \dots, a_{i+9}$  и  $a_{1999-i}, \dots, a_{1999-i-9}$ . Пусть  $z$  – произведение чисел, содержащихся одновременно и в первой, и во второй группе (произведение нулевого числа сомножителей считается равным единице);  $x$  и  $x'$  – произведения чисел, содержащихся, соответственно, только в первой и только во второй группе, оставшихся на своем месте после проведения

операции;  $y$  и  $y'$  — произведения чисел, содержащихся, соответственно, только в первой и только во второй группе, поменявшихся местами в результате операции. Тогда сумма произведений чисел в рассматриваемых двух группах до операции равна  $s_1 = zxy + zx'y$ , а после операции  $s_2 = zxy' + zx'y$ . Имеем:  $s_1 - s_2 = z(x - x')(y - y')$ . Нетрудно видеть, что эта разность неположительна. Кроме того, если в результате операции не все числа остались на своих местах, то хотя бы для одной пары симметричных групп из 10 чисел эта разность строго отрицательна, что и доказывает лемму.

**Решение задачи.** Считаем числа 1, 2, ..., 1999 расставленными так, что дуги между соседними числами равны. Пусть числа расставлены оптимальным образом, т.е. так, что сумма произведений десяток соседних чисел максимальна. Проведем диаметр через одно из чисел. Из леммы следует, что для всех пар чисел, симметричных относительно этого диаметра, меньшие числа расположены на одной полуокружности, а большие — на другой. С точностью до поворотов и осевых симметрий существует единственная расстановка чисел, обладающая этим свойством. Действительно, число 2 должно быть рядом с числом 1. Иначе найдется диаметр, отделяющий 2 от 1, причем числа 1 и 2 не симметричны относительно этого диаметра. Обозначим числа, симметричные числам 1 и 2 относительно этого диаметра, соответственно через  $A$  и  $B$ . Тогда  $A > 1$  и  $2 < B$ , что противоречит лемме.

Далее строим искомую расстановку по индукции. Пусть мы доказали, что числа 1, 2, ...,  $2k$  при  $1 \leq k \leq 998$  расставлены как в ответе, т.е. в порядке (для определенности по часовой стрелке)  $2k, 2k - 2, \dots, 2, 1, 3, \dots, 2k - 1$  подряд. Обозначим через  $A$  и  $B$ , соответственно, числа, следующие за  $2k$  против часовой стрелки и за  $2k - 1$  по часовой стрелке. Предположим, что число  $2k + 1$  отлично от  $A$  и  $B$ . Тогда пусть  $C$  — следующее за  $2k + 1$  по часовой стрелке число.  $C$  отлично от 1, 2, ...,  $2k$ . Числа  $C$  и  $2k - 1$ , а также  $2k + 1$  и  $B$  симметричны относительно некоторого диаметра, но  $C > 2k - 1$ , а  $2k + 1 < B$  — это противоречие. Предположим теперь, что число  $2k + 2$  отлично от  $A$  и  $B$ . Тогда пусть  $C$  — следующее за  $2k + 2$  по часовой стрелке число,  $D$  — следующее за  $2k + 2$  против часовой стрелки число. Пусть  $A \neq 2k + 1$ . Тогда  $2k + 2 < A$ , но  $D > 2k - 1$  — это противоречит лемме. Если же  $A = 2k + 1$ , то  $B \neq 2k + 1$  и получаем аналогичное противоречие ( $2k + 2 < B$ , но  $C > 2k - 1$ ). Таким образом, получаем, что либо  $A = 2k + 1$  и  $B = 2k + 2$ , либо  $A = 2k + 2$  и  $B = 2k + 1$ . Нетрудно видеть, что лемме не противоречит только второй случай. Это завершает доказательство индукционного перехода.

#### 11 класс

- См. задачу М1692 «Задачника «Кванта».
- а) Достаточно провести прямую через середину дуги и середину ломаной  $BAD$ .  
б) Пусть  $A$  — вершина угла,  $B$  и  $D$  — концы дуги,  $C$  — ее середина. Сегменты, опирающиеся на хорды  $BC$  и  $CD$ , равны. Поэтому достаточно провести через точку  $C$  прямую, которая делит пополам площадь четырехугольника  $ABCD$ . Проведем через середину диагонали  $BD$  прямую  $l$ , параллельную  $AC$ . Пусть, для определенности,  $l$  пересекает отрезок  $AB$  (случай пересечения  $l$  с отрезком  $AD$  рассматривается аналогично). Обозначим  $E = l \cap AB$ ; прямая  $CE$  — искомая. Это видно из рассмотрения площадей треугольников  $ACD$ ,  $ACE$  и  $ACB$  (с общим основанием  $AC$ ).
- См. задачу М1695 «Задачника «Кванта».
- Нужно доказать следующее утверждение. Пусть каждая сторона квадрата имеет длину 1 и разделена на  $2^n$  равных частей ( $n \geq 0$ ), а через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Тогда кузнечик сможет попасть в любую из  $4^n$  полученных клеток.  
При  $n = 0$  факт тривиален. Проведем индуктивный переход от  $n$  к  $n + 1$ . Рассмотрим какую-то из клеток размера  $4^{-(n+1)}$ .

Выберем самую близкую к ней вершину исходного квадрата и выполним гомотегию с центром в этой вершине и с коэффициентом 2. Тогда выбранная клетка перейдет в одну из клеток размера  $4^{-n}$ . По предположению индукции, кузнечик может в нее попасть. Если он прыгнет теперь на половину расстояния до указанной вершины, то он попадет в нужную клетку.

**5.** Цвета, в которые покрашен граф, занумеруем от 1 до  $k$ . Те вершины цвета 2, которые не соседствуют ни с какими вершинами цвета 1, перекрасим в цвет 1. Новая раскраска будет правильной, поэтому в ней  $k$  цветов. Значит, какие-то вершины цвета 2 не перекрашены и потому соседствуют с вершинами цвета 1. Аналогично, вершины цвета 3, которые не соседствуют с вершинами цвета 2, перекрасим в цвет 2, и т.д. вплоть до последнего цвета.

После этого рассмотрим какую-либо вершину цвета  $k$ . Она не перекрашена, и потому соседствует с вершиной цвета  $k - 1$ . Эта вершина тоже не перекрашена, так как иначе ее первоначальный цвет был бы  $k$  и она не могла бы соседствовать с вершиной того же цвета. Раз вершина не перекрашена, то она соседствует с вершиной цвета  $k - 2$ , и т.д. Продолжая этот процесс, построим путь из вершин  $k$  цветов, которые не были перекрашены.

**6.** Единственное решение уравнения:  $n = 2, k = 1, l = 2, m = 3$ . Докажем это.

Пусть  $p$  — простой множитель  $l$ . Поскольку  $n^m = (1 + n^k)^l - 1$ , то  $n^m$  делится на  $(1 + n^k)^p - 1$ . Но это выражение равно  $n^k \cdot p + n^{2k} \cdot p(p-1)/2 + n^{3k} \cdot r$ , где  $r$  — неотрицательное целое число. Разделив на  $n^k$ , получим  $p + n^k \cdot p(p-1)/2 + n^{2k} \cdot r$ . Если  $n$  не делится на  $p$ , то это выражение взаимно просто с  $n$ , и  $n^m$  не может на него делиться. Значит,  $p$  — делитель  $n$ . Тогда  $1 + n^k \cdot (p-1)/2 + (n^{2k}/p) \cdot r$  — натуральное число, большее единицы. Если  $k > 1$  или  $p$  нечетно, то второе слагаемое делится на  $n$  (третье делится всегда), сумма взаимно проста с  $n$ , и  $n^m$  не может на нее делиться. Следовательно,  $k = 1$  и  $l$  имеет вид  $2^i$ .

Вспомним теперь, что  $n^m = (1 + n^k)^l - 1 = (1 + n)^l - 1 = ln + \dots$ . В правой части все члены, начиная со второго, делятся на  $n$ . Из этого, поскольку  $m > 1$ , следует, что  $l$  делится на  $n$ . Значит,  $n$ , как и  $l$ , является степенью двойки. Но

$$(1 + n)^l - 1 = [(1 + n)^{l/2} + 1] \cdot [(1 + n)^{l/2} - 1] = [(1 + n)^{l/2} + 1] \dots (n + 2)n,$$

откуда  $n + 2$  также является степенью двойки. Следовательно,  $n = 2$ . Множитель разложения, предшествующий  $n + 2 = 4$ , равнялся бы  $3^2 + 1 = 10$  и не был бы степенью двойки. Значит,  $l = 2$ , откуда  $m = 3$ .

**7.** Рассмотрим окружность длины 1 как отрезок  $[0; 1]$  с отождествленными концами. Тогда дробную часть  $f$  числа  $k \cdot \lg 2$  можно рассматривать как точку этой окружности. Первая цифра числа  $2^k$  управляется положением  $f$  относительно точек деления 0,  $\lg 2, \dots, \lg 9$ . (Например, если  $2^k$  начинается с 7, то  $7 \cdot 10^s < 2^k < 8 \cdot 10^s$  для натурального  $s$ . Дробная часть числа  $k \cdot \lg 2$  равна  $k \cdot \lg 2 - s$ , и она находится между  $\lg 7$  и  $\lg 8$ .)

Предположим, что первые цифры чисел  $2^{2^n}$  повторяются с периодом  $k$ . Тогда при любом  $n$  дробные части чисел  $2^{2^n} \cdot \lg 2$  и  $2^{2^{n+k}} \cdot \lg 2$  попадают в один и тот же интервал окружности;

длина любого из этих интервалов не превосходит  $\lg 2 < \frac{1}{3}$ .

Пусть на окружности отложены дробные части двух положительных чисел  $A$  и  $B$ ; эти дробные части различны и не являются диаметрально удаленными точками окружности; длина меньшей из двух дуг, на которые эти точки делят окружность, равна  $x$ . Тогда, как легко показать непосредственно, длина одной из дуг, соединяющих дробные части чисел  $2A$  и



$2B$ , равна  $2x$ . Пусть теперь дробные части чисел  $A$  и  $B$  лежат в одном интервале; рассмотрим пары  $2A$  и  $2B$ ,  $4A$  и  $4B$  и т.д. Из сказанного выше следует, что на некотором шаге одна из

дуг, соединяющих дробные части пары, станет больше  $\frac{1}{3}$ , но меньше  $\frac{2}{3}$ . Значит, эти дробные части принадлежат разным интервалам окружности.

Применяя эти рассуждения к числам  $A = 2^{n_0} \cdot \lg 2$  и  $B = 2^{n_0+k} \cdot \lg 2$ , где  $n_0$  – некоторое фиксированное натуральное число, получаем противоречие с предположением о периодичности.

**Избранные задачи Московской физической олимпиады 1999 года**

**ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР**

*8 класс*

1. Пусть после того, как на поршень массой  $M_1$  положили груз массой  $m$ , этот поршень опустился на  $\Delta h_1$ , а второй поршень поднялся на  $\Delta h_2$  относительно начального положения. При этом перепад уровней жидкости в сосудах будет равен  $\Delta h_1 + \Delta h_2$ , а разность давлений, создаваемая этим перепадом, будет компенсироваться добавочным давлением, которое создает груз массой  $m$ , лежащий на первом поршне:

$$\rho g(\Delta h_1 + \Delta h_2) = \frac{mg}{S_1},$$

где  $S_1$  – площадь первого поршня. Так как объем жидкости под поршнями не изменился, справедливо соотношение

$$S_1 \Delta h_1 = S_2 \Delta h_2,$$

где  $S_2$  – площадь второго поршня. Из этих уравнений получаем

$$\Delta h_2 = \frac{m}{\rho(S_1 + S_2)} = h.$$

Пусть теперь груз положили на поршень массой  $M_2$ . Проводя аналогичные рассуждения, можно честно найти высоту, на которую при этом поднимется поршень массой  $M_1$ . Однако, зная выражение для  $\Delta h_2$ , ответ можно просто угадать. Действительно, в рассматриваемой системе все равно, какой поршень считать «первым», а какой – «вторым». Значит, для того чтобы получить ответ, можно просто перенумеровать все величины в последней формуле, т.е. заменить все индексы «1» на индексы «2» и наоборот. В итоге получим

$$\Delta h'_1 = \frac{m}{\rho(S_2 + S_1)} = \Delta h_2 = h,$$

т.е. поршень массой  $M_1$  поднимется относительно начального положения на ту же самую высоту  $h$ .

2. Прежде всего нужно придумать модель, которую можно применить для описания процесса охлаждения кофе при помощи мороженого. Предположим, что мороженое по своим свойствам близко ко льду и что для охлаждения кофе до требуемой температуры в него нужно будет положить мороженое ложечкой несколько раз. Будем считать, что при соприкосновении с мороженым ложечка охлаждается до температуры брикета, а при опускании в кофе – нагревается до температуры напитка. Теперь можно попытаться решить задачу «в лоб», определяя температуру кофе после погружения в него каждой очередной порции. Однако в задаче не спрашивается, сколько ложек мороженого нужно положить в кофе, а требуется лишь оценить необходимую массу мороженого. Поэтому сначала решим задачу в первом приближении. Запишем уравнение теплового баланса для системы, состоящей из чашки, ложки, кофе и мороженого. Энергия, выделяющаяся при охлаждении кофе от температуры  $T_1$  до темпера-

туры  $T_3$ , идет на нагрев фарфоровой чашки от комнатной температуры  $T_k$  до температуры  $T_3$ , на нагрев мороженого от температуры  $T_2$  до температуры  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ , на его плавление и дальнейший нагрев от температуры  $T_0$  до температуры  $T_3$ , а также на нагрев серебряной ложки. Ложка, в соответствии со сказанным, может помещаться в мороженое и в кофе по нескольку раз. Это означает, что нагрев ложки каждый раз происходит на разное количество градусов, потому что мороженое понемногу нагревается от горячей ложки, а кофе понемногу остывает при погружении в него ложки. Чтобы не рассматривать весь процесс детально (ведь мы ищем оценку), предположим, что ложка погружается в мороженое один раз и нагревается на некоторую среднюю разность температур кофе и мороженого  $\Delta T_{cp} \approx 80^\circ\text{C}$ . Учитывая все это, получаем оценку для массы мороженого:

$$m_2 \approx 47 \text{ г.}$$

Легко показать, что ложечка слабо влияет на процесс охлаждения кофе, так как для ее нагрева нужно затратить очень небольшое количество энергии. Понятно также, что оценка средней разности температур  $\Delta T_{cp}$  и числа порций мороженого практически не влияет на ответ.

*9 класс*

1.  $M = m \left( \frac{L^2}{2aH} - 1 \right) = 4,7 \text{ кг.}$

2. Пусть в некоторый момент времени шарик имел радиус  $R$  и площадь поверхности  $S$ , а за маленький промежуток времени  $\Delta t$  радиус шарика (вследствие коррозии) уменьшился на  $\Delta R$ . Тогда объем растворенного за это время алюминия будет равен  $\Delta R S$ , а его масса –  $\rho \Delta R S$ . С другой стороны, масса растворенного за время  $\Delta t$  алюминия равна  $\alpha S \Delta t$ , где  $\alpha = 10^{-4} \text{ г/(см}^2 \cdot \text{ч)}$  – масса металла, растворяющегося за один час с одного квадратного сантиметра поверхности. Приравняем полученные выражения:

$$\rho \Delta R S = \alpha S \Delta t$$

и найдем скорость уменьшения радиуса шарика:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\rho}.$$

Мы видим, что радиус шарика уменьшается с постоянной скоростью. Ясно, что шарик растворится полностью тогда, когда изменение его радиуса станет равно половине начального диаметра. Тогда из последней формулы получаем

$$t = \frac{\rho d}{2\alpha} = 13500 \text{ ч} = 562,5 \text{ сут} (\approx 18,5 \text{ месяцев}).$$

*10 класс*

1. Для упрощения рассмотрим два двигателя, находящихся по разные стороны от оси корабля, вокруг которой происходит вращение (ясно, что наличие двух остальных симметрично расположенных двигателей не повлияет на результат). Понятно, что маневр должен совершаться следующим образом: сначала двигатели разгоняют вращение корабля вокруг оси, а когда он повернется на  $90^\circ$ , они должны начинать тормозить корабль так, чтобы он, повернувшись еще на  $90^\circ$ , остановился. Так как двигатели развивают постоянную силу тяги, времена разгона и торможения одинаковы. Таким образом, чтобы решить задачу, нам достаточно найти время разворота на  $90^\circ$ .

При развороте двигатели перемещаются по дугам окружности. Так как силы, возникающие при работе двигателей, направлены по касательной к этой окружности, тангенциальное ускорение каждого двигателя равно  $a_t = F/m$ , где  $F$  – сила тяги,  $m$  – масса. При повороте на  $90^\circ$  двигатель проходит путь  $s$ , равный четверти длины дуги окружности. Из кинематики имеем  $s = \pi r/2 = a_t t^2/2$ , где  $r$  – радиус дуги окружности. Подставляя в эту формулу выражение для  $a_t$ , найдем

время поворота на  $90^\circ$ :

$$t = \sqrt{\frac{\pi r m}{F}}.$$

Из полученного выражения видно, что время разворота тем меньше, чем меньше радиус дуги окружности. Значит, разворот выгоднее проводить вокруг оси  $B$ .

2.  $a_A = \frac{3}{2}g - \frac{m_1 + 4m_2}{4m_1 m_2} F$ . Отметим, что при некоторых соотношениях между  $m_1$ ,  $m_2$  и  $F$  (в частности, при очень малых  $F$ ) ускорение точки  $A$  может быть больше ускорения свободного падения  $g$ .

3. Обозначим время пролета частицы над пластинкой через  $\tau$ . Так как частица отклонилась от своего первоначального направления полета на небольшой угол  $\alpha$ , можно считать, что величина ее скорости практически не изменилась и осталась равной  $v$ . Значит, изменение импульса частицы мало и в основном обусловлено изменением направления вектора скорости:  $\Delta p = p\alpha = mv\alpha$ . С другой стороны, в соответствии со вторым законом Ньютона изменение импульса частицы за малый промежуток времени равно произведению силы, вызвавшей это изменение, на величину данного промежутка времени:  $\Delta p = F\tau$ . Время пролета частицы над пластинкой приближенно равно  $\tau \approx L/v$ . Силу же, действовавшую на частицу во время полета, можно найти, пользуясь методом изображений, который применим тогда, когда расстояние от частицы до пластинки много меньше ее размеров. Действительно, если поместить под пластинкой симметрично покоящейся частице заряд  $-q$ , то картина силовых линий в пространстве над пластинкой не изменится; в частности, из-за симметрии пластинка останется эквипотенциальной поверхностью. Это означает, что силу взаимодействия незаряженной пластинки и точечного заряда  $q$ , находящегося на расстоянии  $d$  от нее, можно найти как силу взаимодействия двух точечных зарядов  $q$  и  $-q$ , расположенных на расстоянии  $2d$  друг от друга симметрично относительно пластинки. Все приведенные рассуждения будут справедливы и в случае медленного (по сравнению со скоростью распространения электромагнитного взаимодействия) движения частицы. Значит, для приближенного вычисления силы  $F$  можно воспользоваться законом Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2}.$$

Окончательно получим

$$v = \frac{q}{4d} \sqrt{\frac{L}{\pi\epsilon_0 \alpha m}}.$$

11 класс

1. На полоски линии действуют две силы: кулоновская сила электростатического притяжения, обусловленная наличием на поверхности полосок зарядов, и сила Ампера, связанная с протеканием тока и отталкивающая пластинки друг от друга. Вычислим кулоновскую силу, приходящуюся на единицу длины линии. Выделим участок линии длиной  $l$ . Пусть на нем имеется заряд  $q$ . Тогда

$$\frac{F_k}{l} = \frac{qE}{2l} = \frac{qU}{2bl} = \frac{CU^2}{2bl} = \frac{\epsilon_0 a U^2}{2b^2},$$

где  $E$  — напряженность электрического поля между полосками линии, которая представляет собой плоский конденсатор. (Здесь учтено, что кулоновская сила равна произведению заряда, находящегося на рассматриваемом участке пластины, на величину напряженности поля, создаваемого другой пластиной, которая равна  $E/2$ .) Теперь найдем силу Ампера, приходящуюся на единицу длины линии. Она пропорциональна квадрату силы тока:

$$\frac{F_A}{l} = BI^2 = B \left( \frac{U}{R} \right)^2.$$

Коэффициент пропорциональности  $B$  можно найти из условия, что при некотором сопротивлении нагрузки  $R = R_0$  силы Кулона и Ампера уравновешивают друг друга:

$$B = \frac{\epsilon_0 a R_0^2}{2b^2}.$$

После увеличения сопротивления нагрузки в  $n = 5$  раз кулоновская сила не изменится, а сила Ампера уменьшится в  $n^2$  раз; значит, полоски линии будут притягиваться с силой, равной разности сил Кулона и Ампера:

$$F = \frac{\epsilon_0 a U^2}{2b^2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \approx 0,042 \text{ Н/м}.$$

2. Прежде всего заметим, что луч, который видит пассажир, отражается от головки рельса, которая имеет округлую форму. Поэтому при большом радиусе закругления рельсов (и, следовательно, при малых углах падения и отражения луча) можно пренебречь тем, что глаза пассажира и фары метропоезда находятся на разных высотах над уровнем рельсов, и считать, что фары, глаз пассажира и точка рельса, от которой отражается свет, лежат в практически горизонтальной плоскости. Далее, необходимо рассмотреть два случая: когда тоннель закругляется в сторону платформы, на которой стоит пассажир, и когда тоннель закругляется в противоположную от пассажира сторону.

Для первого случая из рисунка 11 видно, что прежде всего пассажир увидит луч от правой фары, отраженный правым рельсом. Отрезки, проведенные из центра кривизны пути  $O$  к фаре  $F$ , пассажиру  $P$ , точке отражения света от рельса  $K$  и точке  $S$ , в которой луч касается стенки тоннеля, составляют друг с другом равные углы  $\alpha$ . Из треугольника  $OPK$  можно приближенно найти расстояние от внутренней стенки тоннеля до внешнего рельса:

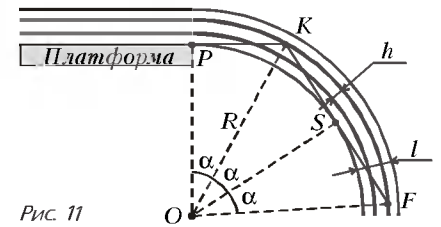


Рис. 11

$$\frac{l}{2} + \frac{h}{2} \approx R(1 - \cos \alpha) \approx \frac{R\alpha^2}{2},$$

откуда

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{l+h}{R}},$$

а искомое расстояние

$$L \approx 3\alpha R \approx 3\sqrt{R(l+h)}.$$

Второй случай отличается от первого тем, что луч касается стенок тоннеля дважды. Из соответствующих построений находим

$$L \approx (3\sqrt{l+h} + \sqrt{2l})\sqrt{R}.$$

#### ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. По часам с обломанной минутной стрелкой можно установить, что первые 3000 м автомобиль проходит за  $(60m + 30)$  секунд, где  $m$  — целое неотрицательное число. Поэтому величина  $1/v$ , где  $v$  — скорость автомобиля, может принимать следующий ряд значений:

$$\frac{1}{v} = 0,01; 0,03; 0,05; 0,07; 0,09; 0,11; 0,13; \dots) \text{ с/м}.$$

Следующие 4000 м автомобиль проходит за  $(60n + 20)$  секунд, где  $n$  — целое неотрицательное число. Поэтому

$$\frac{1}{v} = 0,005; 0,02; 0,035; 0,05; 0,065; 0,08; 0,095; 0,11; 0,125; \dots) \text{ с/м}.$$

Так как автомобиль движется с постоянной скоростью, величина  $1/v$  может принимать только те значения, которые встречаются и в первой, и во второй последовательности чисел, т.е.

$$\frac{1}{v} = (0,05; 0,11; \dots) \text{ с/м.}$$

По условию задачи  $v > 40 \text{ км/ч} \approx 11,1 \text{ м/с}$ , или  $1/v < < 0,09 \text{ с/м}$ . Таким образом, из набора возможных значений  $1/v$  условию задачи удовлетворяет единственное:  $1/v = 0,05 \text{ с/м}$ . Отсюда  $v = 20 \text{ м/с} = 72 \text{ км/ч}$ .

2. Так как спирт сгорает с постоянной скоростью, количество теплоты, переданное системе, прямо пропорционально времени нагрева. Из графика в условии задачи следует, что в течение первых 60 секунд стакан и жидкость нагревались, затем в течение 120 секунд жидкость кипела и испарялась, и, наконец, в последние 40 секунд нагревался лишь пустой стакан. Составив уравнение теплового баланса для каждого промежутка времени, найдем

$$L_{\text{ж}} = \frac{\mu q \Delta t_2}{m} = 891 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}, \quad c_{\text{ж}} = \frac{\mu q (\Delta t_1 - \Delta t_3)}{m \Delta T_3} = 2475 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$$

9 класс

1. При движении шарика в жидкости на него действуют сила тяжести, сила Архимеда и сила вязкого трения. Две первые силы являются объемными. Это значит, что их сумма пропорциональна разности  $|\rho - \rho_{\text{ж}}|$  (здесь  $\rho$  – плотность шарика) и объему шарика, т.е. кубу его диаметра  $d$ . Третья сила пропорциональна произведению  $cd^n$ , где  $v$  – скорость шарика,  $n$  – неизвестный показатель степени. При движении с постоянной скоростью сумма сил тяжести и Архимеда равна силе вязкого трения. Тогда для дробинки диаметром  $d_1$  запишем

$$A(\rho_{\text{л}} - \rho_{\text{ж}})d_1^3 = B d_1^n v_1,$$

или

$$v_1 = \frac{A}{B} \cdot 7 \rho_{\text{ж}} d_1^{3-n}.$$

Аналогично, для дробинки диаметром  $d_2$  имеем

$$v_2 = \frac{A}{B} \cdot 7 \rho_{\text{ж}} d_2^{3-n} = \frac{A}{B} \cdot 7 \rho_{\text{ж}} d_1^{3-n} \cdot 2^{3-n} = 4v_1 = \frac{A}{B} \cdot 7 \rho_{\text{ж}} d_1^{3-n} \cdot 2^2.$$

Отсюда получаем

$$2^{3-n} = 2^2, \text{ и } n = 1.$$

Теперь можно найти скорость, с которой всплывет пузырек воздуха (массой воздуха пренебрегаем):

$$v_3 = \frac{A}{B} \cdot \rho_{\text{ж}} d_3^{3-n} = \frac{A}{B} \cdot \rho_{\text{ж}} d_3^2 = \frac{1}{7} \frac{A}{B} \cdot 7 \rho_{\text{ж}} d_1^2 \cdot 1,5^2 = \frac{2,25}{7} v_1 \approx 0,32 v_1.$$

2. Из условия задачи вытекает, что никакие две клеммы не могут быть подключены только к батарейке (иначе бы амперметр при подключении к этим клеммам зашкаливало); никакие две клеммы не могут быть соединены друг с другом только соединительным проводом (иначе бы два тока из трех совпадали); если схема состоит из нескольких отдельных частей, то все три клеммы должны быть подключены к той ее части, которая содержит батарейку. Рассмотрев все возможные схемы «черного ящика», получаем, что величины сопротивлений могут быть равны  $R_1 = R_2 = \frac{E}{2I}$ , когда батарейка и сопротивления соединены последовательно, или  $R_1 = \frac{E}{2I}$  и  $R_2 = \frac{E}{I}$ , когда батарейка и сопротивления соединены «звездой» (рис.12).

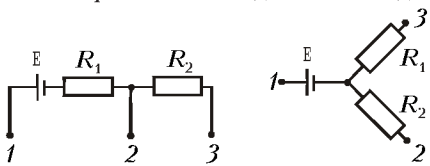


Рис. 12

10 класс

1. Пусть сетка состоит из  $N$  радиальных нитей, а жесткость каждой из них равна  $k$ . При смещении центра сетки вниз на  $\Delta x \ll R$  сила упругости  $F$ , действующая со стороны сетки на гимнаста, направлена вертикально вверх (в силу центральной симметрии) и равна

$$F = N F_1 \sin \alpha \approx N F_1 \frac{\Delta x}{R} = N k \left( \sqrt{R^2 + (\Delta x)^2} - R \right) \frac{\Delta x}{R} \approx \frac{N k (\Delta x)^3}{2 R^2},$$

где  $F_1$  – сила упругости, действующая на гимнаста со стороны каждой из нитей. Из условия известно, что, когда гимнаст лежит в центре сетки неподвижно, она прогибается на величину  $l$ , при этом действующая на гимнаста сила тяжести  $mg$  уравновешивается силой  $F$ :

$$mg = \frac{N k l^3}{2 R^2}.$$

Рассмотрим теперь падение гимнаста с высоты  $H$ . Перед падением его потенциальная энергия (относительно уровня ненатянутой сетки) была равна  $mgH$ . В момент максимального прогиба сетки она складывалась из энергии в поле силы тяжести  $-mgL$  (она отрицательна) и энергии упругой деформации сетки

$$\frac{N k}{2} \left( \sqrt{R^2 + L^2} - R \right)^2 \approx \frac{N k L^4}{8 R^2}.$$

Из закона сохранения механической энергии получаем

$$mgH = -mgL + \frac{N k L^4}{8 R^2},$$

откуда находим

$$H = \frac{L^4}{4 l^3} - L.$$

2. Пусть искомый заряд на одном из шариков положителен и равен  $q$  (тогда, ввиду одинаковости шариков, заряд на втором шарике равен  $-q$ ). Окружим шарик воображаемой концентрической сферической поверхностью радиусом  $r + \Delta r$  (где  $\Delta r \ll r$ ) и найдем напряжение  $\Delta U$  между ней и поверхностью шарика:

$$\Delta U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \Delta r.$$

Спротивление среды, находящейся между этими поверхностями, равно

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta r}{4\pi r^2},$$

значит, сила тока, текущего между рассматриваемыми поверхностями, равна

$$I = \frac{\Delta U}{\Delta R} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0 \rho}.$$

Так как по условию задачи заряд на шарике является установившимся, найденная величина  $I$  представляет собой силу тока, текущего во всей цепи.

Найдем теперь разность потенциалов между поверхностями шариков. С одной стороны, она равна

$$\Delta \phi = \frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0 r},$$

с другой стороны –

$$\Delta \phi = E - IR.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{q}{2\pi \epsilon \epsilon_0 r} = E - \frac{qR}{\epsilon \epsilon_0 \rho},$$

решая которое, находим величину заряда:

$$q = \frac{2\pi r \rho \epsilon \epsilon_0 E}{\rho + 2\pi r R}.$$



## 11 класс

1. Обсудим сначала, почему стержень начнет вращаться. Рассмотрим воображаемый круговой контур, по которому движутся заряды при вращении стержня вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. При выключении магнитного поля магнитный поток через этот контур уменьшается, что приводит к возникновению вихревого электрического поля. Это поле действует на заряды и разгоняет их. Данный процесс (для простоты понимания) можно представлять так, как будто вместо воображаемого контура имеется проводящее кольцо, содержащее всего два носителя заряда. Тогда при выключении магнитного поля в проводнике будет возникать ЭДС индукции и потечет ток, т.е. заряды придут в движение.

Прежде всего найдем ЭДС индукции  $\mathcal{E}$ . По условию, однородное магнитное поле в любой момент времени сосредоточено между полюсами электромагнита и строго вертикально. По закону электромагнитной индукции,

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -S \frac{\Delta B}{\Delta t},$$

где  $\Phi = SB$  – магнитный поток через контур,  $S = \pi d^2/4$  – площадь торцевого сечения полюса электромагнита,  $B$  – мгновенное значение индукции магнитного поля. Пусть магнитное поле равномерно убывает от значения  $B_0$  до нуля за время  $\tau$ :

$$B = B_0 - \frac{B_0}{\tau} t,$$

тогда

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{B_0}{\tau}, \text{ и } \mathcal{E} = -S \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi d^2 B_0}{4\tau}.$$

С другой стороны, ЭДС по определению есть отношение работы, совершаемой сторонними силами при перемещении пробного заряда, к его величине. В нашем случае появление ЭДС индукции связано с возникновением вихревого электрического поля, которое и совершает работу. Значит,

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{F_{\text{эл}}}{q} \pi L = E \pi L,$$

где  $E$  – напряженность вихревого электрического поля. Приравняв два выражения для  $\mathcal{E}$ , найдем

$$E = \frac{d^2 B_0}{4\tau L}.$$

Так как система симметрична, для нахождения угловой скорости вращения стержня можно рассмотреть только один заряд. На этот заряд в вихревом электрическом поле действует сила, равная  $F = qE$  и направленная по касательной к окружности, по которой он движется. В соответствии со вторым законом Ньютона, эта сила приводит к появлению тангенциального (касательного) ускорения

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{qd^2 B_0}{4m\tau L}.$$

В течение времени  $\tau$ , за которое происходит выключение магнитного поля, заряды движутся по окружности с этим ускорением и приобретают линейную скорость

$$V = a\tau = \frac{qd^2 B_0}{4mL}.$$

Этой линейной скорости зарядов соответствует угловая скорость вращения стержня

$$\omega = \frac{V}{L/2} = \frac{qd^2 B_0}{2mL^2}.$$

2. Так как радиус экрана много больше расстояния между соседними интерференционными полосами, участок экрана вблизи точки  $A$ , на котором располагаются эти полосы, можно считать плоским. Круговая частота колебаний, соответствующих волне с длиной волны  $\lambda$ , распространяющейся со

скоростью  $c$ , равна  $\omega = 2\pi c/\lambda$ .

Угол, который образует направление первой волны, падающей вдоль радиуса  $BO$ , с рассматриваемой частью экрана, равен  $\beta_1 = \pi/2 - \varphi$  (рис. 13). Для второй волны соответствующий угол равен  $\beta_2 = \pi/2 - \varphi - \alpha$ . Расстояние  $\delta x$  между двумя соседними максимумами на экране найдем из условия, что разность фаз обеих волн равна  $2\pi$ :

$$2\pi = \frac{\omega}{c} \delta x (\cos \beta_1 - \cos \beta_2),$$

откуда

$$\delta x = \frac{2\pi c}{\omega} \frac{1}{\cos \beta_1 - \cos \beta_2} = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left( \varphi + \frac{\alpha}{2} \right)},$$

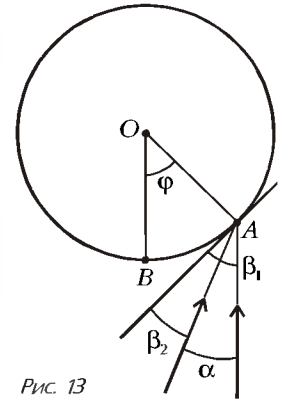


Рис. 13

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования  
<http://www.courier.com.ru>

Vivos Voco!  
<http://techno.ru/vivovoco>  
(раздел «Из номера»)

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк,  
М.М.Константинова, М.А.Сумнина, Л.Н.Тишков,  
П.И.Чернуцкий**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

## ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

**Л.З.Симакова**

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во №0110473

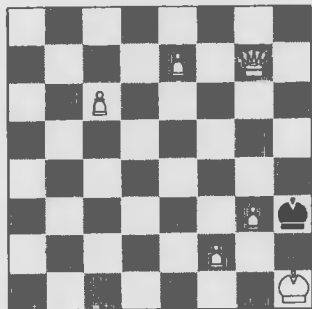
Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,  
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховском полиграфическом комбинате  
Комитета Российской Федерации по печати  
142300 г. Чехов Московской области  
Заказ №

## Лишний король НЕ ПОМЕШАЕТ

Впервые «лишний» король на шахматной доске появился в следующей задаче-шутке.



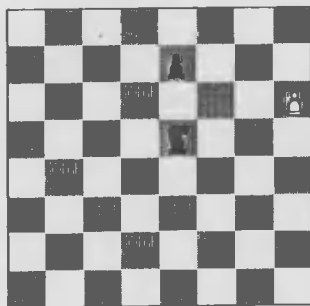
Л.Куббель, 1941

Мат в 2 хода

Один черный король запатован, и решает только появление еще одного черного короля: 1. e8♚ (черный)! ♚d8 2. ♚d7×. Эффектный мат сразу двум королям.

Впоследствии в этой задаче-шутке было придумано другое шуточное решение, причем более короткое: доска поворачивается против часовой стрелки на 90° и следует 1. g7×!

А вот в поддавках пешка часто становится королем уже без всяких шуток...

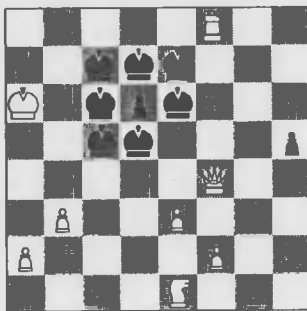


Белые начинают и проигрывают

1. h7 ♖g4! 2. h8♚ (белый)! Игра идет по «серьезным» правилам, в противном случае белая пешка могла бы превратиться в черную фигуру, и в поддавки белые побеждали! Но появление любой другой белой фигуры на руку черным: 2. h8♚ ♖e5 3. ♚:e5 e6, 2. h8♚ ♖e5 3. ♚:e5 e6 и 4...e5, 2. h8♚ ♖h6 3. ♚:h6 e6, 2. h8♚ e6 3. ♚f7 (g6) 3... ♖e5 4. ♚:e5 – черным нечем ходить, и они выиграли в поддавки.

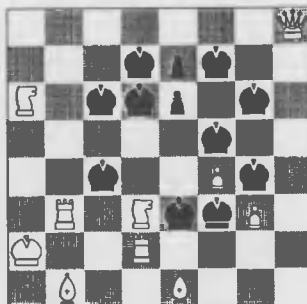
2...e5. 3. ♚g7 ♖h2 4. ♚g6 e4 5. ♚g5 ♖g4 6. ♚:g4 e3 7. ♚g3 e2 8. ♚g2 и, независимо от того, во что превратится пешка, белый король следующим ходом становится под удар.

Двух королей мы уже матовали. А вот позиция, в которой матуются сразу семь королей.



Мат в 5 ходов

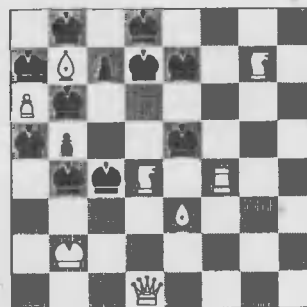
1. ♖f3 h4 2. ♖d2 h3 3. f3 h2 4. ♖e4+ ♚b4 5. ♚:d6×! Все семь королей в плену.



Г.Рейхель, 1882

1. ♖d3–e5!! А максимальное количество королей, которое можно заматовать в 1 ход, равно десяти: семь королей получают мат от коня, еще три матуются при вскрытии линий (в игру вступают ладьи b3 и d2, а также слон b1).

Этой задаче почти 120 лет. И, разумеется, данная идея неоднократно совершенствовалась. Вот одно из ее лучших воплощений.



В.Хуторной, 1991

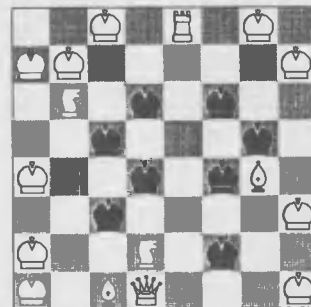
1. ♖c6×!! Вновь мат десяти королям, но общее количество фигур уменьшено на две – здесь их двадцать.

Интересен следующий вопрос: скольким королям одной стороны можно одновременно поставить мат при следующих условиях:

а) на доске находятся 18 королей (два настоящих и 16 превращенных);

б) для матования разрешается использовать не более шести фигур (остальные восемь уже покинули доску при движении пешек вперед: иначе они бы не дошли до крайних горизонталей).

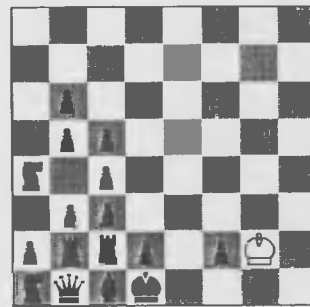
Известна позиция с матом восьми королям.



Решает 1. ♖d2–e4×!

Но может быть, и при указанных условиях число королей можно довести до девяти. Попробуйте это сделать!

Итак, хорошо, когда есть много королей. А если он один, и нет никаких надежд увеличить число королей? Однако и один король может творит чудеса на доске. Правда, на победу у него уже шансов нет...



Б.Сидоров, 1982

1. ♚f1! b4 2. ♚:f2 (только теперь можно взять пешку) 2...b5 3. ♚f1 ♖b6 4. ♚f2 ♖d5 5. ♚f1 ♖e3+ 6. ♚f2 ♖g4+ 7. ♚f1 ♖h2+ 8. ♚f2 ♖f3 9. ♚f1 с ничьей. Конечно, проигрывает 1. ♚:f2?, так как в этом случае на 5. ♚f2 следует 5... ♖e3!, и клубок черных фигур распадается.

Е.Гук

## ИГРУШКИ ПО ФИЗИКЕ

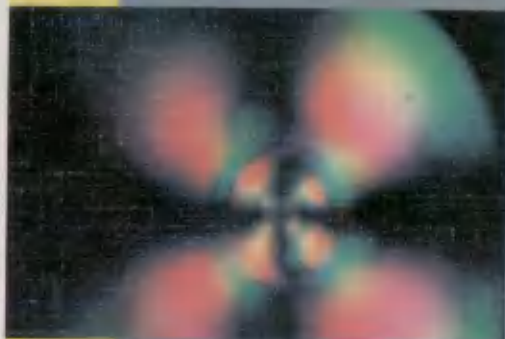
1



2



3



4



## ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕДМЕТОВ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Знаете ли вы, сколько интересного можно увидеть, рассматривая яркий источник света сквозь очень узкий зазор? Оказывается, с помощью обычного микрометра (фото 1) можно выполнить несколько любопытных оптических экспериментов, демонстрирующих поперечность колебаний световой волны и поляризацию – характеристику оптического излучения, описывающую анизотропию световой волны. Обратите внимание, как изменяется цвет источника света (неба, лампы и т.п.), рассматриваемого через зазор микрометра, при уменьшении его, например, от 10 мкм до полного закрытия.

Не менее любопытно рассматривать некоторые прозрачные предметы через поляроид. На фото 2 показан участок линейки из оргстекла, помещенной между двумя скрещенными поляроидами, на фото 3 – прозрачная коробочка от поляроида, сфотографированная по той же схеме, а на фото 4 изображен пенал от аудиокассеты, сфотографированный с увеличением и использованием только одного поляризационного светофильтра, установленного перед объективом фотоаппарата.

Цветные полосы (изохромы) – результат интерференции световых волн при освещении предметов поляризованным светом. Подумайте, почему при обычном освещении интерференция наблюдается только в тонких пленках (например, в мыльных пузырях), а для поляризованного света интерференционная картина возможна, когда свет проходит через массивный предмет толщиной, много большей длины световой волны.

(Подробнее о поляризации света рассказывается внутри журнала.)